



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE TÉRMICO MODERNO PARA
SUPERFÍCIES ESTENDIDAS

Pablo Borges Barbosa

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande
Leonardo Antonio Bermeo Varón

Rio de Janeiro
Março de 2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Departamento de Engenharia Mecânica
DEM/POLI/UFRJ



PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE TÉRMICO MODERNO PARA
SUPERFÍCIES ESTENDIDAS

Pablo Borges Barbosa

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Examinado por:

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

Prof. Albino José Kalab Leiróz, Ph.D.

Prof. Marcelo José Colaço, D.Sc.

Leonardo Antonio Bermeo Varón, M.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

Março de 2015

Barbosa, Pablo Borges

Projeto de um Sistema de Controle Térmico Moderno para Superfícies Estendidas/ Pablo Borges Barbosa. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2015.

IX, p. 76: il.; 29,7 cm.

Orientador: Hércio Rangel Barreto Orlande; Co-orientador: Leonardo Antonio Bermeo Varon

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Mecânica, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 58-61.

1. Aleta. 2. Condução de Calor. 3. Controle Térmico. 4. Controle Moderno. 5. Controle Ótimo. I. Orlande, Hércio Rangel Barreto. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Mecânica. III. Título.

“Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme.”

Antoine Laurent de Lavoisier

À minha família

AGRADECIMENTOS

À Tania, por ser mãe.

Ao George, por ser pai.

À Pilar, por ser irmã.

Ao Pedro, por ser irmão.

Por serem assim, a maior metade de mim são eles.

À Luísa, por estar sempre ao meu lado. À Patrícia, André e Paulo por me receberem.

Ao professor Helcio, obrigado por todas as orientações e ajudas durante os últimos três anos, foram essenciais para minha formação que, alias, não seria a mesma formação se eu não tivesse trabalhado com você.

Ao Leonardo, pela sua enorme contribuição na implementação experimental deste projeto, e por ter apontado a cada passo os erros da parte textual do trabalho.

Às minhas grandes amigas e “coleguinhas” de estudo Karla e Cristina, pelas noites viradas e a amizade verdadeira que eu encontrei na graduação. À “professora” Bruna, pela paciência de me ajudar nas matérias da pós.

À equipe SeMec, em especial à Monique, Paula, Nickolas, Túlio, Gabriel e Bruno. Não somente o Fundão precisa de pessoas como vocês, mas o mundo também!

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE TÉRMICO MODERNO PARA SUPERFÍCIES ESTENDIDAS

Pablo Borges Barbosa

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Leonardo Antonio Bermeo Varon

Curso: Engenharia Mecânica

Esse projeto apresenta o desenvolvimento de um sistema de controle térmico para uma bancada com uma aleta resfriada por convecção natural com ar ambiente. Nesse estudo é aplicada a teoria de controle moderno com formulação matemática do sistema em espaço de estados. A bancada experimental é composta de um bloco de alumínio, no qual são inseridas e fixadas uma resistência elétrica e uma aleta cilíndrica de latão. A resistência elétrica e o bloco de alumínio são modelados por parâmetros concentrados. O propósito do sistema de controle é manter uma temperatura constante na base da aleta. Os objetivos desse controle são atingidos através da manipulação da geração de calor pela resistência elétrica inserida no sistema. O controle é desenvolvido usando um regulador linear-quadrático ótimo e um observador de estado de Luenberger. A dinâmica do controle e do sistema é simulada computacionalmente com os programas Matlab[®] e Scilab[®], sendo o sistema implementado em bancada através do software Matlab[®], usando um sistema de aquisição de dados modular da National Instruments[™].

Palavras-chave: Aleta, Condução de Calor, Controle Térmico, Controle Moderno, Controle Ótimo.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

DESIGN OF A MODERN THERMAL CONTROL SYSTEM FOR EXTENDED SURFACES

Pablo Borges Barbosa

Advisors: Helcio Rangel Barreto Orlande

Leonardo Antonio Bermeo Varon

Course: Mechanical Engineering

This work presents the design of a thermal control system for a test bench with a fin cooled by free convection with ambient air. The modern control theory with the state space mathematical formulation is applied for this study. The test bench is composed of a block made of aluminum, wherein an electrical resistor and a cylindrical brass fin are inserted and fixed. The electrical resistor and the aluminum block are modeled as lumped systems. The purpose of the control system is to maintain a constant temperature at the base of the fin. The objective of this control is achieved by manipulating the heat rate generated by the electrical resistor. The control system is designed by using an optimum linear-quadratic regulator and a Luenberger state observer. The control system dynamic is simulated by computer using the softwares Matlab[®] and Scilab[®], being implemented in the test bench by Matlab[®], using the National Instruments[™] modular system for data acquisition.

Keywords: Fin, Heat Conduction, Thermal Control, Modern Control, Optimal Control.

Sumário

NOMECLATURA.....	ix
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. O PROBLEMA FÍSICO E A FORMULAÇÃO ANALÍTICA.....	4
2.1. Equação Governante para o Bloco de Alumínio.....	5
2.2. Equação Governante para a Base da Aleta.....	8
2.3. Equação Governante da Seção Livre da Aleta.....	10
3. O PROBLEMA NUMÉRICO E A FORMULAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS..	13
3.1. Método das Linhas.....	14
3.2. Mudança de Variáveis.....	16
3.3. Dinâmica do Sistema em Espaço de Estados	17
3.4. Método de Runge-Kutta.....	24
3.5. Estabilidade, Consistência e Convergência de Malha.....	25
4. PROJETO E ANÁLISE DO SISTEMA DE CONTROLE.....	29
4.1. Controlabilidade Completa de Estado.....	29
4.2. Controlabilidade Completa de Saída.....	30
4.3. Observabilidade Completa de Estados.....	31
4.4. Estabilizabilidade.....	32
4.5. Regulador Linear-Quadrático Ótimo (LQR).....	32
4.4. Estimador de Estados (Observador de Luenberger).....	37
4.5. Ajuste de Referência Não-Nula.....	42
4.6. Procedimento Experimental.....	45
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	49
6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	56
REFERÊNCIAS.....	58

NOMECLATURA

A	área transversal da aleta, [m^2]
\mathbf{A}	matriz de dinâmica do sistema
A_c	superfície de contato entre o bloco e a aleta, [m^2]
A_n	amplitude do erro do esquema de diferenças finitas, [K]
\mathbf{B}	matriz de dinâmica de entrada
\mathbf{C}	matriz de dinâmica de saída
c_p	calor específico a pressão constante do latão, [$J/kg K$]
c_{pAl}	calor específico a pressão constante do alumínio, [$J/kg K$]
D	matriz de alimentação (escalar)
\mathbf{e}	erro da estimativa de estados, [K]
f	função do sistema autônomo
\mathbf{f}_n	parâmetro definido na equação (21)
\mathbf{F}	solução do problema de controle em regime permanente
\dot{g}	taxa de geração por unidade de volume, [W/m^3]
h	coeficiente de transferência de calor experimental, [W/m^2K]
h_c	coeficiente de transferência de calor por contato, [W/m^2K]
h_m	coeficiente médio de transferência de calor, [W/m^2K]
I	intensidade do sinal de controle, [A]
J_{LQR}	índice de desempenho
k	condutividade térmica do latão, [$W/m K$]
\mathbf{k}	ganho proporcional
\mathbf{k}_d	ganho proporcional do problema dual
\mathbf{L}	ganho do observador de Luenberger
$L_{eq,base}$	comprimento característico da base da aleta, [m]
n	sinal de saída do problema dual
\mathbf{N}	solução para o sinal de controle do problema em regime permanente
P	perímetro da secção transversal da aleta, [m]
\mathbf{P}	matriz solução da Equação Algébrica de Riccati
\mathbf{Q}	matriz de peso relativo do erro
\dot{Q}_{perdas}	taxa de calor perdido pelo bloco, [W]
$q_b(t)$	fluxo de calor na base da aleta, [W/m^2]
\mathbf{R}	parâmetro de peso relativo do consumo de energia
S	Região de estabilidade do método de Runge-Kutta de 4ª ordem

s	conjunto de autovalores
T	matriz diagonalizada da dinâmica do sistema
T_∞	temperatura ambiente, [K]
$T_0(x)$	distribuição de temperaturas da aleta no tempo inicial, [K]
t_m	m-ésimo nó do tempo
$T_{m.i}$	temperatura no j-ésimo nó do espaço e no m-ésimo nó do tempo, [K]
u	sinal de controle
\bar{u}	sinal de controle em regime permanente
U	potência do sinal de controle, [W]
v	sinal de controle do problema dual
V	voltagem do sinal de controle, [V]
V_b	volume da base da aleta, [m ³]
V_{bloco}	volume do bloco de alumínio, [m ³]
V_g	volume de geração, [m ³]
W	Matriz de diagonalização de A
x	coordenada longitudinal da aleta, [m]
x	vetor de estado
$\hat{\mathbf{x}}$	estimativa do vetor de estados
$\bar{\mathbf{x}}$	vetor de estados da solução em regime permanente
x_j	j-ésimo nó do espaço
y	sinal de leitura
z	vetor de estado do problema dual

SIMBOLOS GREGOS

Γ_a	parâmetro adimensional definido pela equação (15)
Γ_b	parâmetro adimensional definido pela equação (14)
Γ_{bloco}	parâmetro adimensional definido pela equação (13)
Γ_c	parâmetro adimensional definido pela equação (14)
$\Gamma_{geração}$	parâmetro adimensional definido pela equação (13)
Γ_n	parâmetro adimensional definido pela equação (15)
$\Gamma_{verdás}$	parâmetro adimensional definido pela equação (13)
Γ_∞	parâmetro adimensional definido pela equação (16)
Δt	incremento de tempo, [s]
Δx	incremento de espaço, [m]
ϵ	erro de truncamento do esquema de diferenças finitas, [K]

ρ	massa específica do latão, [kg/m^3]
ρ_{Al}	massa específica do alumínio, [kg/m^3]
τ	variável adimensional de tempo
χ	variável adimensional de espaço

1. INTRODUÇÃO

Sistemas de controle térmico encontram aplicações em inúmeros setores da indústria. São exemplos da aplicação de dispositivos de controle térmico o uso na indústria de alimentos, em processos químicos, em usinas de geração de energia, no setor automotivo e no setor de eletrônicos.

Na primeira metade do século passado, relés térmicos de pares bimetálicos foram aplicados comercialmente em sistemas de controle térmico (Taylor et al., 1948). Apesar do princípio da termometria resistiva já ser conhecido, e ter sido aplicado com sucesso em dispositivos fabricados no século XIX (Siemens, 1871), foi apenas após a segunda metade do século seguinte que sua aplicação ganhou força devido ao desenvolvimento da eletrônica e dos semicondutores. Com as novas tecnologias, o uso de termistores superpassou os dispositivos mecânicos de controle em termos de preço e precisão (Blackburn, 1987). Para aplicações de controle térmico que exigem uma precisão ainda maior, devem ser usados leitores de infravermelho ou termopares, como no caso do presente trabalho.

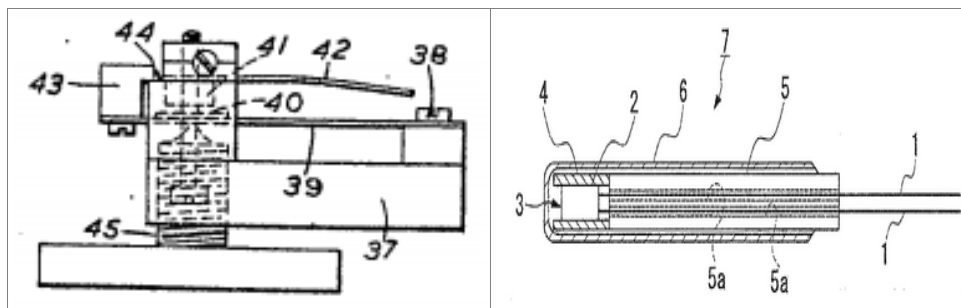


Figura 1. Imagens acessíveis em Patentes publicadas. A esquerda um relé térmico (Taylor et al., 1948) e a direita um termistor (Blackburn, 1987).

Atualmente, devido aos desenvolvimentos tecnológicos ora mencionados, é possível embarcar dispositivos cada vez menores nos sistemas a serem controlados, possibilitando leitura *in situ*, bem como o armazenamento e processamento de dados. Desse modo, sistemas dinâmicos de controle térmico puderam ser projetados segundo leis de controle definidas, por exemplo, por reguladores e observadores ótimos (Kalman, 1960a; Kalman, 1960b) ou, ainda, filtros de partículas (Gordon, 1993).

Dispositivos térmicos que aplicam leis de controle ótimo já são de uso corrente não só no âmbito da pesquisa como também na indústria (Karvounis et al., 2008). Comumente, sistemas de controle térmico são utilizados industrialmente para prescrever temperaturas ou fluxos de calor em um processo ou sistema.

No presente trabalho deseja-se garantir condições de contorno de Dirichlet em um sistema térmico fazendo uso da teoria de controle moderno. Como alternativa ao uso dos métodos de controle descritos, a condição de fronteira de temperatura constante poderia ser aproximadamente garantida por meio de transferência de calor com materiais submetidos a mudança de fase. Entretanto, essa abordagem apresentaria algumas limitações de implementação por envolver, geralmente, grandes coeficientes de transferência de calor, grande volume de material em mudança de fase e, especialmente, por exigir cuidado especial com o contato entre os materiais e o isolamento do sistema.

Este estudo apresenta a modelagem matemática, a simulação numérica e os resultados de bancada experimental para um sistema de controle térmico. O sistema é composto por um bloco de alumínio no qual uma resistência elétrica e uma aleta cilíndrica de latão estão inseridas. Termopares do tipo “J” foram posicionados ao longo da aleta. Um termopar do tipo “T” faz a medição da temperatura ambiente. A figura 2 mostra a bancada experimental, com sua aleta de latão fixa no bloco de alumínio, apresentando seis termopares para leitura das temperaturas ao longo de seu comprimento.

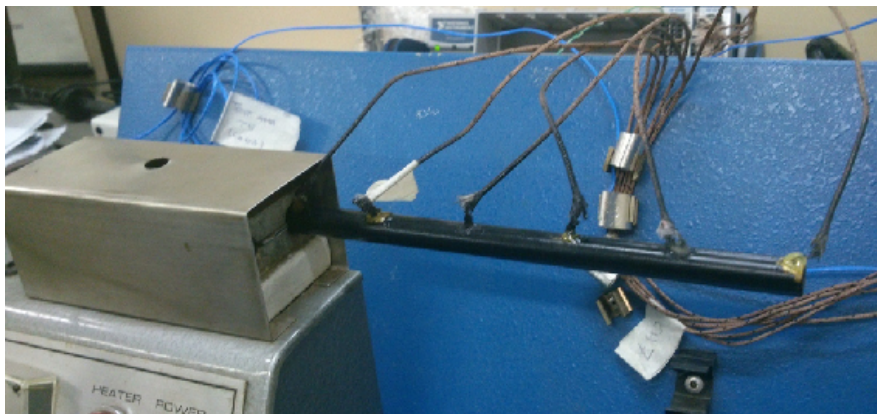


Figura 2. Bancada experimental do sistema de controle térmico do presente trabalho.

O sistema é modelado utilizando a formulação de parâmetros concentrados para a resistência elétrica e para o bloco de alumínio, e utilizando a equação transiente de

transferência de calor para a aleta. Os valores do coeficiente de transferência de calor da aleta são obtidos experimentalmente na própria bancada.

A equação transiente da aleta é semidiscretizada usando o Método das Linhas, e o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante é integrado numericamente no tempo pelo método de Runge-Kutta. Esta abordagem expressa o problema numa única equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem, que é característica da teoria de controle moderno, trazendo vantagens em relação a teoria de controle clássico, pois reduz o problema de múltiplas entradas e múltiplas saídas num problema de uma única equação (Ogata, 2003). Estabilidade e consistência são estudadas para o esquema numérico explícito de passo único utilizado. Convergência, no sentido de Lax-Richtmyer (Lax e Richtmyer, 1956) é inferida por análise teórica e é apoiada pelos experimentos.

O controle selecionado neste trabalho possui um regulador linear-quadrático ótimo (Kalman, 1960a) e um observador de estados Luenberger (Luenberger, 1964). O regulador controla o aporte de potência dado ao sistema pela resistência elétrica, enquanto que o observador de estados recolhe informação sobre a temperatura a partir de um ou mais termopares na bancada experimental e estima as variáveis de estado.

As simulações numéricas foram realizadas com os softwares Scilab® e Matlab® sendo sua implementação experimental foi feita como o Matlab®. O módulo de aquisição de dados da bancada para leitura dos termopares e controle da resistência elétrica foi fabricado pela National Instruments™. Resultados numéricos e experimentais são comparados a fim de observar se a modelagem do problema físico e do sistema de controle são adequadas.

A abordagem utilizada para o controle térmico busca um comportamento estável, no qual o tempo de convergência e o controle do sobressinal possam ser apropriadamente ajustados por meio de matrizes e parâmetros de custo da função objetivo do problema de controle ótimo.

2. O PROBLEMA FÍSICO E A FORMULAÇÃO ANALÍTICA

A bancada experimental do trabalho proposto compreende um bloco de alumínio no qual são inseridas uma aleta cilíndrica de latão e uma resistência elétrica, conforme mostrado na Figura 3. Os modos de transferência de calor estudados são a convecção pelas superfícies livres do bloco e da aleta e a condução ao longo da aleta.

A resistência elétrica é idealizada como uma fonte de geração de calor no interior do bloco, sendo desprezados os efeitos na dinâmica do sistema relativos à capacidade térmica da própria resistência e ao contato entre a resistência e o bloco. A resistência elétrica possui potência nominal 150 W e voltagem nominal 115 V. A superfície inferior do bloco é apoiada em material isolante, sendo desprezada a troca de calor do bloco através da interface da superfície de apoio. A figura 3 abaixo é uma representação do sistema térmico a ser controlado.

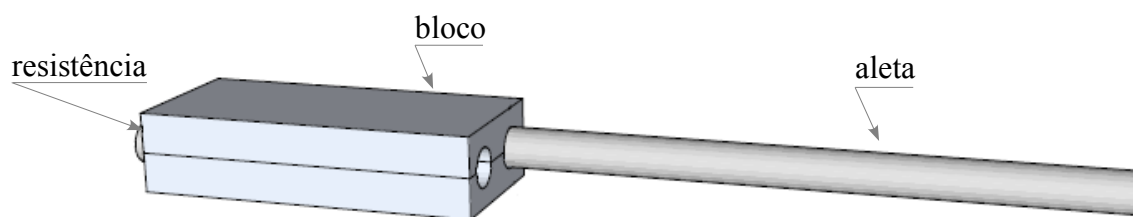


Figura 3. Sistema térmico composto por um bloco de alumínio, uma resistência elétrica e uma aleta cilíndrica de latão.

Foi utilizado um sistema modular de aquisição de dados via Ethernet NI cDAQ 9188, da National Instruments™, dispondo do módulo para aquisição de dados de termopares NI 9213 e o módulo de saída de sinal analógico NI 9264, usado em conjunto com um módulo de potência proporcional para alimentação da resistência.

Termopares são dispostos no sistema térmico, sendo um termopar tipo “T” para medição da temperatura ambiente e pelo menos um termopar tipo “J” para medição da temperatura da aleta, a fim de estimar o estado do sistema. As variáveis de estado do problema físico em estudo são as temperaturas T do sistema térmico em função do tempo e da posição.

2.1. EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA O BLOCO DE ALUMÍNIO

O bloco de alumínio serve de suporte tanto para a resistência elétrica, responsável pelo aporte de calor no sistema, quanto para a aleta em estudo. O bloco possui dois furos passantes ao longo de sua dimensão principal, conforme mostrado na figura 4, e é bipartido, de modo que a resistência e a aleta possam ser inseridas facilmente nos furos passantes. Um parafuso allen, não mostrado na figura, promove o aperto das duas seções do bloco bipartido, eliminando as folgas e fixando a resistência e a aleta no interior do bloco.

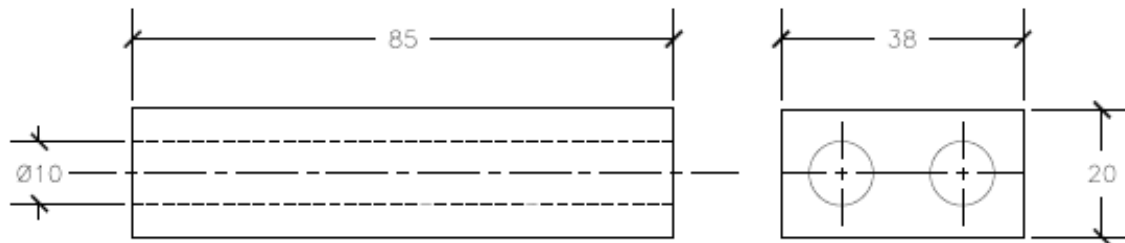


Figura 4. Bloco de alumínio, cotado em milímetros.

No equacionamento do problema foi utilizada a hipótese de que o coeficiente de transferência de calor do contato entre o bloco de alumínio e a aleta de latão é de valor constante, aproximado por $h_c = 10^3 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$, tomado de ensaios presentes na literatura (Ayers, 2003), sendo desprezada a variação do coeficiente de contato em função do fluxo de calor na interface entre o alumínio e o latão.

Devido à alta condutividade térmica do alumínio e ao coeficiente de transferência de calor relativamente baixo associado às superfícies externas do bloco, a temperatura global do bloco de alumínio T_1 foi formulada pelo modelo de parâmetros concentrados, com pode ser visto na equação (1) abaixo. A hipótese de parâmetros concentrados será suportada pela análise do número de Biot associado ao fenômeno, desenvolvida adiante.

$$V_{\text{bloco}} c_{p,Al} \rho_{Al} \frac{dT_1}{dt} = \dot{g}(t) V_g - h_c A_c [T_1(t) - T_2(t)] - \dot{Q}_{\text{perdas}}(t) \quad (1)$$

onde:

$V_{bloco} \equiv$ volume do bloco, $[m^3]$

$\rho_{Al} \equiv$ massa específica do alumínio, $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$c_{pAl} \equiv$ calor específico a pressão constante do alumínio, $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$

$\dot{g}(t) \equiv$ taxa de geração por unidade de volume na resistência elétrica, $\left[\frac{W}{m^3}\right]$

$V_g \equiv$ volume da resistência térmica dentro do bloco de alumínio, $[m^3]$

$h_c \equiv$ coeficiente de contato entre o bloco e a aleta, $\left[\frac{W}{m^2 \cdot K}\right]$

$A_c \equiv$ superfície de contato entre a aleta e o bloco, $[m^2]$

$T_1, T_2 \equiv$ temperaturas no bloco e na base da aleta, respectivamente, $[K]$

$\dot{Q}_{perdas}(t) \equiv$ taxa de calor perdido pelo bloco, $[W]$

A temperatura T_2 representa a temperatura da base da aleta, que é a seção da aleta interna ao bloco, constituindo uma segunda hipótese de parâmetros concentrados. Assim, as variáveis de estado presentes na equação governante do bloco são as temperaturas T_1 e T_2 , referentes ao bloco de alumínio e a base da aleta, respectivamente. Uma malha é definida tendo T_1 e T_2 como os primeiros dois nós. Os outros n nós são distribuídos regularmente ao longo da seção externa da aleta, conforme ilustrado na figura 5. A justificativa para essa discretização será vista no capítulo 3.

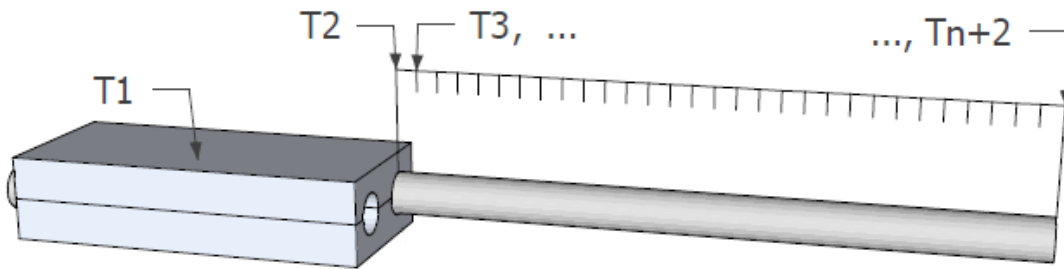


Figura 5. Modelo de malha unidimensional da bancada de teste.

Para estimar a taxa de calor perdido pelo bloco, \dot{Q}_{perdas} , considera-se convecção livre nas superfícies do bloco em contato com o ar, desprezando-se a troca de calor da superfície do fundo do bloco apoiada na bancada, sob a justificativa de que a mesma é isolada termicamente. É utilizada uma correlação simplificada (McAdams,

1954) para calcular o coeficiente de convecção livre à pressão atmosférica para faixas de temperatura de 20 a 800 °C, que pode ser vista na tabela 1.

Tabela 1. Coeficiente médio de transferência de calor h_m (McAdams, 1954).

Geometria	Tipo de escoamento	h_m , [W/m ² .K]
Placa vertical	Escoamento Laminar	$h_m = 1,42 (T_1 - T_\infty)^{1/4}$
Placa horizontal, com a superfície superior quente	Escoamento Laminar	$h_m = 1,32 (T_1 - T_\infty)^{1/4}$

A partir dessa correlação obtêm-se as perdas de calor em placas planas para uma dada variável de estado T_1 e uma dada temperatura ambiente T_∞ . Para calcular a taxa de calor perdida pelo bloco, é considerada uma aproximação do coeficiente médio de transferência de calor, h_m , para toda a área superficial do bloco, A_{bloco} , sendo dada pela média dos coeficientes de suas superfícies verticais e horizontais, ponderada por suas áreas.

$$\dot{Q}_{perdas} = h_m A_{bloco} (T_1 - T_\infty) = 1,36 A_{bloco} (T_1 - T_\infty) (T_1 - T_\infty)^{1/4} \quad (2a)$$

A equação (2a) é uma função não-linear das perdas de calor com a variável de estado, o que gera uma dificuldade na formulação do problema diferencial vetorial-matricial de primeira ordem linearizado. Logo, será postulada uma hipótese para linearização. Propõe-se que h_m seja calculado à temperatura de filme em regime permanente, que é dada pela diferença $(T_{ref} - T_\infty)$, onde T_{ref} é a temperatura de referência para qual deseja-se a convergência do sistema de controle. Temos, assim, a equação (2a) linearizada em (2b).

$$\dot{Q}_{perdas} = 1,36 A_{bloco} (T_1 - T_\infty) (T_{ref} - T_\infty)^{1/4} \quad (2b)$$

O número de Biot é a razão entre a taxa de calor trocada por convecção na superfície de um sólido e a taxa de calor trocada por condução no interior do mesmo sólido. Há uma recomendação comum na literatura (Özışık, 1985) de se considerar a

temperatura uniforme no interior deste sólido para valores $Bi \ll 0,1$. Esse valor de Biot tem como significado físico que as trocas por condução são mais de 10 vezes maiores que as trocas por convecção, de modo que uma descontinuidade na distribuição de temperatura no sólido se uniformizará rapidamente, validando a hipótese de parâmetros concentrados.

$$Bi = \frac{h_m L_{bloco}}{k_{Al}}$$

Dado a geometria do problema em questão, e os coeficientes de condução do alumínio e de convecção do bloco de alumínio, pode-se calcular o número de Biot associado ao fenômeno. O valor obtido é da ordem de 10^{-4} . Esse valor é compatível com as recomendações para o uso da hipótese de parâmetros concentrados. Os valores utilizados para as propriedades dos materiais do bloco de alumínio e da aleta de latão estão representados na tabela 2, abaixo.

Tabela 2. Propriedades de materiais a 300K (Touloukian and Ho, 1972).

Propriedades dos Materiais	Alumínio (AISI 6061)	Latão (CDA360: 0,7 Cu; 0,3 Zn)
Condutividade Térmica k (W/m.K) ⁽¹⁾	154,9	110
Massa Específica ρ (kg/m ³) ⁽¹⁾	2700	8530
Calor Específico c_p (J/kg.K) ⁽¹⁾	962,9	380

⁽¹⁾ incertezas relativas a esses valores são menores que 3,5%.

2.2. EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA A BASE DA ALETA

A base da aleta é a porção da aleta interna ao bloco, caracterizada pelo fato de trocar calor por contato com o bloco e por condução com a seção livre da aleta. A aleta

utilizada possui 9,5 mm de diâmetro e 230 mm de comprimento, sendo que cerca de 80 mm de seu comprimento esta inserido no furo do bloco de alumínio. O espaço anular entre o furo e a aleta é preenchido por uma folha de alumínio para aumentar o contato na interface. Para melhor compreensão, na figura 6 pode ser visualizada em destaque a base da aleta. Abaixo, a equação (3) governante para temperatura na base da aleta.

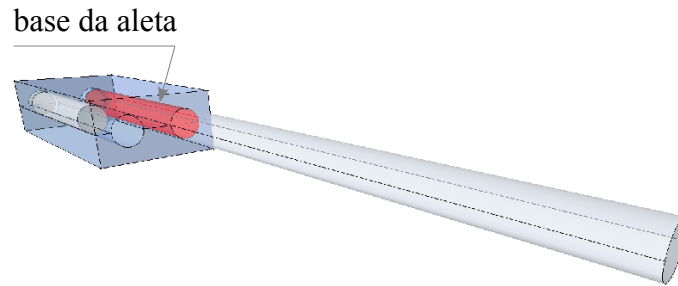


Figura 6. Representação esquemática do sistema térmico, em destaque a base da aleta.

$$V_b c \rho \frac{dT_2(t)}{dt} = h_c A_c [T_1(t) - T_2(t)] - q_b(t) A \quad (3)$$

onde :

$V_b \equiv$ volume da base da aleta, $[m^3]$

$A \equiv$ área da secção transversal da aleta, $[m^2]$

$q_b(t) \equiv$ fluxo de calor na base da aleta, $\left[\frac{W}{m^2}\right]$

$\rho \equiv$ massa especifica do latão, $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$c \equiv$ calor especifico do latão, $\left[\frac{J}{kg.K}\right]$

A equação governante da base é uma equação linear em função das variáveis de estado T_1 e T_2 com um termo não-homogêneo q_b , referente ao fluxo de calor da base para a aleta, que será definido na subseção a seguir. A hipótese de parâmetros concentrados é suportada pelo cálculo do número de Biot, segundo a expressão abaixo.

$$Bi = \frac{h_c L_{eq,base}}{k}$$

Onde k é a condutividade térmica do latão; e $L_{eq,base}$ é comprimento equivalente característico da base da aleta, razão entre o volume da base e a área de contato. O valor de Biot obtido é da ordem de 10^{-2} . Esse valor é compatível com as recomendações para o uso da hipótese de parâmetros concentrados (Özışık, 1985).

2.3. EQUAÇÃO GOVERNANTE DA SEÇÃO LIVRE DA ALETA

Para formular a equação governante da seção livre da aleta, toma-se o balanço de energia de um elemento diferencial da seção livre da aleta, conforme representado na figura 7.

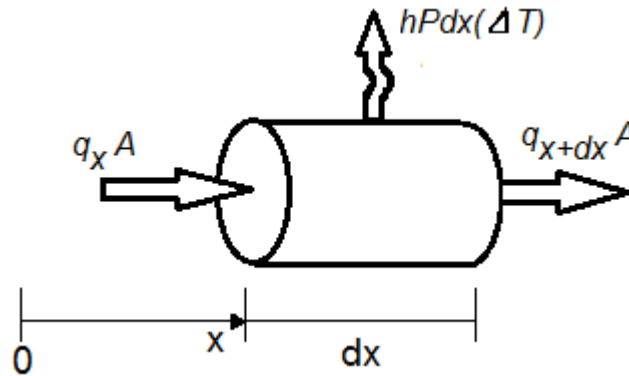


Figura 7. Elemento diferencial da seção livre da aleta.

É assumida a hipótese de parâmetros concentrados ao longo da seção transversal da aleta, de modo que as temperaturas em qualquer estado inicial sejam expressas em função apenas da coordenada x . A equação (4a) apresenta o balanço de energia para um elemento diferencial da aleta.

$$c \rho A dx \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = q_x A - q_{x+dx} A + hPdx [T_\infty - T(x, t)] \quad (4a)$$

onde:

$T \equiv$ temperatura na seção livre da aleta, $[K]$

$A \equiv$ área da seção transversal da aleta, $[m^2]$

$P \equiv$ Perímetro da seção transversal da aleta, $[m]$

$h \equiv$ coeficiente de convecção natural da aleta, $\left[\frac{W}{m^2 \cdot s} \right]$

Dada a relação,

$$\frac{\partial q}{\partial x} dx = q_{x+dx} - q_x$$

Aplicando essa relação em (4a), obtém-se a equação (4b).

$$c \rho A dx \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} dx A + hPdx [T_\infty - T(x, t)] \quad (4b)$$

Dado ainda que a taxa de transferência de calor por condução na aleta pode ser obtida pela equação constitutiva a seguir, conhecida como lei de Fourier,

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

Aplicando a lei de Fourier em (4b) chega-se à equação (4c).

$$c \rho A dx \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = A \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + hPdx [T_\infty - T(x, t)] \quad (4c)$$

Sob a hipótese de que o coeficiente de condução do latão k pode ser considerado constante para as faixas de temperaturas de trabalho do presente sistema, e dividindo (4c) por kA , obtém-se a equação (5a), que é a equação governante clássica da aleta.

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{hP}{kA} [T_\infty - T(x, t)] \quad \text{para } 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (5a)$$

Com condições de contorno (5b) e (5c)

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q_b(t) \quad \text{para } x = 0 \quad (5b)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} + h T = h T_\infty \quad \text{para } x = L \quad (5c)$$

E com a condição inicial (5d)

$$T = T_0(x) \quad \text{para } t = 0 \quad (5d)$$

Onde L é o comprimento da seção livre da aleta; α é a difusividade térmica do latão, sendo dada por $\alpha = k/\rho c_p$, considerados os valores da tabela 2; e h é o coeficiente de transferência de calor obtido experimentalmente na própria bancada. O problema inverso de estimativa do coeficiente de transferência de calor foi resolvido pelo método de Newton-Gauss, conforme anexo 3. Foi encontrado o valor de $h = 18,8 \text{ W/m}^2\text{K}$, para temperatura ambiente de $25 \text{ }^\circ\text{C}$ e uma temperatura de referência da base da aleta de $155 \text{ }^\circ\text{C}$, com incerteza de medição do coeficiente de transferência de calor menor que $9,5\%$.

Cabe ressaltar que o valor de h , bem como todos os outros valores de parâmetros apresentados nessa seção foram introduzidos na formulação do problema de maneira determinística, sem considerar a propagação de incertezas combinadas ou qualquer outra consideração estatística sobre a sua distribuição. A apresentação das incertezas serve apenas de parâmetro da acurácia desses valores.

A equação (5a) é uma equação diferencial parcial parabólica, sendo incompatível com a formulação desejada para a dinâmica do sistema em equações diferenciais ordinárias lineares. Condições de contorno de Neumann e Robin são dadas pelas equações (5b) e (5c), respectivamente. A equação (5d) é uma condição de distribuição de temperatura em um instante inicial do problema.

Com a finalidade de computar as equações ordinárias e parciais, será introduzido na seção a seguir o uso do Método das Linhas seguido da integração numérica de Runge-Kutta. Uma condição de estabilidade absoluta desse esquema será avaliada. Como resultado da aplicação desse método, a dinâmica do sistema será escrita na forma de uma expressão diferencial vetorial-matricial de primeira ordem, em espaço de estados, compatível com o uso da teoria de controle moderno.

3. O PROBLEMA NUMÉRICO E A FORMULAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Para solução das equações diferenciais parciais governantes do problema físico é proposto o uso do Método das Linhas, também conhecido como Método da Semidiscretização. Este método consiste em discretizar as equações diferenciais parciais por diferenças finitas ou volumes finitos, com respeito a todas as suas dimensões, exceto uma, aproximando a solução do sistema de equações diferenciais parciais pela solução de um sistema de equações diferenciais algébricas semidiscretizadas.

Na aplicação do método das Linhas deste trabalho, foram usadas aproximações por diferenças finitas para discretizar as equações governantes com relação ao espaço. Por sua vez, a integração no tempo é realizada por um algoritmo de malha adaptativa que advém do Método de Runge-Kutta (Dormand e Prince, 1980) presente no Matlab® e no Scilab®, bem como na grande maioria das plataformas de computação numérica. Para ilustrar a possibilidade de termos uma resposta instável, será calculado um passo de tempo Δt máximo, restrito a uma região de estabilidade do método de Runge-Kutta clássico em uma malha de tempo não-adaptativa, ou seja, para um incremento de tempo fixo. Esse passo máximo servirá de limite para o método adaptativo usado. Propõe-se, para desenvolvimento do cálculo do passo máximo, o uso de uma malha regular e estruturada, discretizando o domínio do espaço e do tempo, conforme já introduzida na figura 5, e agora apresentada formalmente na expressão abaixo.

$$T(t_m, x_j) = T_{m,j}$$

sendo,

$$x_j = (j-1) \Delta x \quad \text{para } j = 1,2,3\dots$$

$$t_m = (m-1) \Delta t \quad \text{para } m = 1,2,3\dots$$

onde:

$$\Delta x \equiv \text{incremento de espaço, } [m]$$

$$\Delta t \equiv \text{incremento de tempo, } [s]$$

$$T_{m,j} \equiv \text{temperatura no nó de espaço } x_j \text{ e no tempo } t_m, [K]$$

Uma mudança de variável será proposta de modo a simplificar os termos não-homogêneos das equações diferenciais ordinárias. Finalmente, será apresentada a forma matricial do sistema linear de controle no espaço de estados, para o controle moderno.

3.1. MÉTODO DAS LINHAS

A ideia básica do método das linhas que foi implementado neste trabalho é substituir as derivadas espaciais das equações diferenciais parciais (5a) por aproximações de diferenças finitas. Desse modo, o sistema resultante será formado de equações diferenciais algébricas com respeito ao tempo.

As aproximações de primeira derivada por diferença finita avançada e atrasada vêm diretamente da expansão da série de Taylor, apresentadas nas equações (6a) e (6b), respectivamente. A aproximação por diferenças finitas centrada de primeira ordem é obtida pela soma de (6a) e (6b), resultando na equação (6c), enquanto que a diferença entre (6a) e (6b) resulta na aproximação da segunda derivada por diferenças finitas centrada de segunda ordem, como apresentado na equação (6d).

Expansão de Taylor para aproximação por diferenças finitas avançada;

$$\frac{dT(x_0)}{dx} \approx \frac{T(x_0 + \Delta x) - T(x_0)}{\Delta x} - \frac{1}{2!} \frac{d^2 T(x_0)}{dx^2} \Delta x - \frac{1}{3!} \frac{d^3 T(x_0)}{dx^3} \Delta x^2 - \dots \quad (6a)$$

Expansão de Taylor para aproximação por diferenças finitas atrasada;

$$\frac{dT(x_0)}{dx} \approx \frac{T(x_0) - T(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{1}{2!} \frac{d^2 T(x_0)}{dx^2} \Delta x - \frac{1}{3!} \frac{d^3 T(x_0)}{dx^3} \Delta x^2 + \dots \quad (6b)$$

Aproximação por diferenças finitas centrada de primeira ordem;

$$\frac{\partial T(x_0)}{\partial x} \approx \frac{T(x_0 + \Delta x) - T(x_0 - \Delta x)}{2 \Delta x} - \frac{1}{3!} \frac{d^3 T(x_0)}{dx^3} \Delta x^2 - \frac{1}{5!} \frac{d^5 T(x_0)}{dx^5} \Delta x^4 - \dots \quad (6c)$$

Aproximação por diferenças finitas centrada de segunda ordem.

$$\frac{\partial^2 T(x_0)}{\partial x^2} \approx \frac{T(x_0 + \Delta x) - 2T(x_0) + T(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{2}{4!} \frac{d^4 T(x_0)}{dx^4} \Delta x^2 - \frac{2}{5!} \frac{d^6 T(x_0)}{dx^6} \Delta x^4 - \dots \quad (6d)$$

De onde deduzimos que o erro de truncamento, ϵ , para as aproximações por diferenças finitas avançada e atrasada da primeira derivada é aproximado por,

$$\epsilon = -\frac{1}{2!} \frac{d^2 T(\xi)}{dx^2} \Delta x = O(\Delta x)$$

onde:

$$x_0 - \Delta x \leq \xi \leq x_0 + \Delta x$$

Destaca-se aqui o uso da notação de Landau, $O(\Delta x^p)$, para definir a ordem p do erro de truncamento em função do incremento de espaço da malha, Δx . Analogamente, o erro de truncamento para a aproximação por diferenças finitas centrada de segunda ordem, ϵ_2 , é aproximado pela expressão abaixo.

$$\epsilon_2 = -\frac{2}{4!} \frac{d^4 T(\xi)}{dx^4} \Delta x^2 = O(\Delta x^2)$$

A aproximação por diferenças finitas centrada de segunda ordem (6d) é utilizada no termo do Laplaciano presente na equação governante (5a), obtendo-se a equação governante semidiscretizada (7).

$$\frac{\partial T_{m,j}}{\partial t} \approx \alpha \frac{[T_{m,j+1} - 2T_{m,j} + T_{m,j-1}]}{\Delta x^2} + \alpha \frac{hP}{kA} [T_\infty - T_{m,j}] \quad (7)$$

O termo de fluxo de calor na base, q_b , presente nas equações (3) e (5b) é aproximado por diferença finita avançada de primeira ordem resultando na equação (8).

$$q_b(t) \approx -k \frac{T_3 - T_2}{\Delta x} \quad (8)$$

O termo de primeira ordem da condição de contorno (5c) é aproximado por diferenças finitas centrada de primeira ordem. Finalmente, aplicando (6c) na condição de contorno (5c), obtém-se a equação (9), onde destaca-se o nó fictício $N+3$.

$$k \frac{T_{N+3} - T_{N+1}}{\Delta x} + h T_{N+2} = h T_\infty \quad (9)$$

3.2. MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Para eliminar os termos não-homogêneos das equações (1), (3), (5a) e da condição de contorno (5c), é introduzida uma mudança de variáveis de estado, nas equações (10a-d), onde a nova variável de estado x é uma temperatura adimensional.

$$x_j = \frac{T_j - T_\infty}{T_{ref} - T_\infty} \quad (10a)$$

Seguindo a análise adimensional, é proposto um comprimento adimensional χ característico do problema da aleta,

$$\chi = \frac{x}{L} \quad (10b)$$

E finalmente, é proposto um tempo adimensional dado pelo número de Fourier, como segue.

$$\tau = Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (10c)$$

De onde decorre que,

$$d t = \frac{L^2}{\alpha} d \tau$$

Para completar a análise adimensional, será introduzido sinal de potência adimensional, em função do tempo adimensional.

$$u(\tau) = \frac{\dot{g} V_g L}{k(T_{ref} - T_\infty)} \quad (10d)$$

3.3. DINÂMICA DO SISTEMA EM ESPAÇO DE ESTADOS

A teoria de Controle Moderno difere dos métodos de controle clássicos por formular o problema de controle através de um sistema diferencial vetorial-matricial de primeira ordem no espaço de estados, enquanto o método clássico apresenta o problema em termos de funções de transferência no espaço de Laplace (Ogata, 2003). Sendo assim, a modelagem em espaço de estados será feita na forma do sistema linear clássico de equações (11), dado por (Ogata, 2003):

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{A} \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B} u(\tau) \quad (11a)$$

$$y(\tau) = \mathbf{C} \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{D} u(\tau) \quad (11b)$$

onde:

\mathbf{x} \equiv vetor de estado (vetor coluna n)

u \equiv sinal de controle (escalar)

y \equiv sinal de leitura (escalar)

\mathbf{A} \equiv matriz de dinâmica do sistema ($n \times n$)

\mathbf{B} \equiv matriz de dinâmica de entrada ($n \times 1$)

\mathbf{C} \equiv matriz de dinâmica de saída ($1 \times n$)

\mathbf{D} \equiv matriz de alimentação (1×1)

Propõe-se que a malha da seção livre da aleta possua N nós ao longo do seu comprimento L , e que mais dois nós são dados pela base da aleta e pelo bloco de alumínio. Logo, as matrizes acima terão dimensão $n = N+2$, que é o número total de variáveis de estado do sistema térmico.

As equações governantes (1), (3) e (5a) serão manipuladas de modo a obter uma

formulação do problema semelhante ao sistema linear em (11a) e (11b). Para tanto, o termo de geração de calor presente na equação (1) será calculado através da lei de Ohm, para uma dada intensidade constante do sinal de controle, com a voltagem variando com o tempo, conforme exposto abaixo, na equação (12).

$$\mathbf{u}(\tau) = \frac{\dot{g}(\tau) V_g L}{k(T_{ref} - T_\infty)} = \frac{V(\tau) I L}{k(T_{ref} - T_\infty)} = \frac{U(\tau) L}{k(T_{ref} - T_\infty)} \quad (12)$$

onde:

$\mathbf{u} \equiv$ sinal de controle adimensional

$V \equiv$ voltagem do sinal de controle [V]

$I \equiv$ intensidade do sinal de controle [A]

$U \equiv$ potência do sinal de controle [W]

Aplicando a fórmula para perdas de calor pelas superfícies livres do bloco (2b), a mudança de variáveis (10) e a fórmula do sinal de controle (19) na equação governante (1), obtém-se a nova forma da equação governante (20), referente à dinâmica no primeiro nó da malha.

$$V_{bloco} c_{pAl} \rho_{Al} \frac{dT_1}{dt} = \dot{g}(t) V_g - h_c A_c [T_1(t) - T_2(t)] - \dot{Q}_{perdas}(t)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{\mathbf{U}(t)}{V_{bloco} c_{pAl} \rho_{Al}} - \frac{h_c A_c}{V_{bloco} c_{pAl} \rho_{Al}} (T_1 - T_2) - \frac{1,36 A_{bloco}}{V_{bloco} c_{pAl} \rho_{Al}} (T_1 - T_\infty) (T_{ref} - T_\infty)^{1/4}$$

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} (T_{ref} - T_\infty) = \frac{\mathbf{U}}{V_{bloco} c_{pAl} \rho_{Al}} - \frac{h_c A_c (T_{ref} - T_\infty)}{V_{bloco} c_{pAl} \rho_{Al}} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \frac{1,36 A_{bloco} (T_{ref} - T_\infty)^{5/4}}{V_{bloco} c_{pAl} \rho_{Al}} (\mathbf{x}_1)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{d\tau} = \Gamma_{geração} [\mathbf{u}] - (\Gamma_{bloco} + \Gamma_{perdas}) [\mathbf{x}_1] + \Gamma_{bloco} [\mathbf{x}_2] \quad (13)$$

onde:

$$\Gamma_{geração} = \frac{k L}{V_{bloco} c_{Al} \rho_{al} \alpha}$$

$$\Gamma_{bloco} = \frac{h_c A_c L^2}{V_{bloco} c_{Al} \rho_{al} \alpha}$$

$$\Gamma_{perdas} = \frac{1,36 A_{bloco} L^2 (T_{ref} - T_{\infty})^{1/4}}{V_{bloco} c_{Al} \rho_{al} \alpha}$$

Aplicando a fórmula para o fluxo de calor na base da aleta (8) e a mudança de variáveis (10) na equação governante (3), obtém-se a equação (14) do segundo nó da malha.

$$V_b c \rho \frac{dT_2(t)}{dt} = h_c A_c [T_1 - T_2] - \frac{k A}{\Delta x} [T_3 - T_2]$$

$$\frac{d \mathbf{x}_2(t)}{dt} = \frac{h_c A_c}{V_b c \rho} [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2] - \frac{k A}{V_b c \rho \Delta x} [\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2]$$

$$\frac{d \mathbf{x}_2}{d \tau} = \Gamma_c [\mathbf{x}_1] - (\Gamma_c + \Gamma_b) [\mathbf{x}_2] + \Gamma_b [\mathbf{x}_3] \quad (14)$$

onde:

$$\Gamma_c = \frac{h_c A_c L^2}{V_b c \rho \alpha}$$

$$\Gamma_b = \frac{k A L^2}{V_b c \rho \alpha \Delta x}$$

Do primeiro ao penúltimo nó presentes na seção em convecção natural da aleta, ou seja, de \mathbf{x}_3 até \mathbf{x}_{N+1} , aplica-se a mudança de variáveis (10) na equação governante (7),

obtendo-se a equação (15).

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{[T_{m,j+1} - 2T_{m,j} + T_{m,j-1}]}{\Delta x^2} + \alpha \frac{hP}{kA} [T_\infty - T_{m,j}]$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} (T_\infty - T_{ref}) = \alpha \frac{[\mathbf{x}_{j+1} - 2\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_{j-1}]}{\Delta x^2} (T_\infty - T_{ref}) + \alpha \frac{hP(T_\infty - T_{ref})}{kA} [\mathbf{x}_j]$$

$$\frac{d \mathbf{x}_j}{d \tau} = \Gamma_a [\mathbf{x}_{j-1}] - (2\Gamma_a + \Gamma_n) [\mathbf{x}_j] + \Gamma_a [\mathbf{x}_{j+1}] \quad (15)$$

onde:

$$\Gamma_a = \frac{L^2}{(\Delta x)^2}$$

$$\Gamma_n = L^2 \frac{hP}{kA}$$

Para o último nó da malha, \mathbf{x}_{N+2} , a equação governante (15) não pode ser utilizada diretamente pois apresenta um ponto fictício N+3. A partir da adimensionalização da condição de contorno (8) pode ser encontrada uma expressão para a temperatura adimensional do nó fictício N+3, dada pela equação (16).

$$k \frac{T_{n+3} - T_{n+1}}{\Delta x} + h T_{n+2} = h T_\infty$$

$$k \frac{\mathbf{x}_{N+3} - \mathbf{x}_{N+1}}{2 \Delta x} + h \mathbf{x}_{N+2} = 0$$

$$\mathbf{x}_{N+3} = [\mathbf{x}_{N+1}] - \Gamma_\infty [\mathbf{x}_{N+2}] \quad (16)$$

onde:

$$\Gamma_{\infty} = \frac{2h\Delta x}{k}$$

Aplicando (16) em (15) temos a equação governante (17) para o último nó da malha, isto é, a variável x_{N+2} .

$$\frac{d x_{N+2}}{dt} = 2\Gamma_a [x_{N+1}] - (2\Gamma_a + \Gamma_a \Gamma_{\infty} + \Gamma_n)[x_{N+2}] \quad (17)$$

Retomando o problema proposto, o objetivo é controlar a temperatura na base da aleta, isto é, a variável x_2 . Para tanto, se dispõe de um sinal leitura de temperatura $y(\tau)$ em um ponto da base da aleta e de um sinal de entrada controlável $u(\tau)$, que é o aporte de calor no bloco através da resistência elétrica.

Desprezando-se a dinâmica do sensor de temperatura, a equação (11b) terá como matriz de dinâmica de saída o vetor linha $\mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ e no lugar da matriz de alimentação, o escalar D igual a zero. Desse modo, o sinal de leitura $y(\tau)$ será diretamente a temperatura na base da aleta, x_2 , como mostrado na equação (18b).

$$y(\tau) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{bmatrix} + [0] u(\tau) \quad (18b)$$

A partir dos coeficientes das equações governantes (13), (14), (15) e (17) escreve-se as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} da equação (18a), referentes a dinâmica do sistema e a

dinâmica do sinal de entrada, respectivamente. A dinâmica do sinal de entrada é dada pela equação (20), sendo fácil perceber que o vetor coluna \mathbf{B} tem posto 1, possuindo todos os elementos nulos, exceto a primeira linha referente ao ponto \mathbf{x}_1 do bloco, onde ocorre a geração.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\text{geração}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de dinâmica do sistema \mathbf{A} é uma matriz tridiagonal, sendo que: na primeira linha encontram-se os parâmetros que multiplicam as variáveis de estado da equação (20); na segunda linha encontram-se os parâmetros da equação (21); da terceira a penúltima linha encontram-se os parâmetros da equação (22); e na última linha encontram-se os parâmetros da equação (24).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\Gamma_{\text{bloco}} - \Gamma_{\text{perdas}} & \Gamma_{\text{bloco}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_c & -\Gamma_c - \Gamma_b & \Gamma_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_a & -2\Gamma_a - \Gamma_n & \Gamma_a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_a & -2\Gamma_a - \Gamma_n & \Gamma_a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_a & -2\Gamma_a - \Gamma_n & \Gamma_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2\Gamma_a & -2\Gamma_a - \Gamma_a \Gamma_{\infty} - \Gamma_n \end{bmatrix}$$

O código de Matlab[®] para formulação do sistema em função das variáveis de projeto encontra-se no anexo 1. A saber, o sistema conforme exposto na equação (18) possui como variáveis de projeto as dimensões da aleta e do bloco, o número desejado

de nós da malha da aleta, as propriedades dos materiais envolvidos, a temperatura ambiente e a temperatura de referência para a qual se deseja a convergência.

Segue abaixo a forma expandida das equações (18a) e (18b), apresentando os coeficientes das matrizes **A**, **B**, **C** e o escalar **D**.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+2} \end{bmatrix} = \quad (18a)$$

$$\begin{bmatrix} -\Gamma_{\text{bloco}} - \Gamma_{\text{perdas}} & \Gamma_{\text{bloco}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_c & -\Gamma_c - \Gamma_b & \Gamma_b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_a & -2\Gamma_a - \Gamma_n & \Gamma_a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_a & -2\Gamma_a - \Gamma_n & \Gamma_a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2\Gamma_a - 2\Gamma_a - \Gamma_a & \Gamma_\infty - \Gamma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \Gamma_{\text{geração}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau)$$

$$y(\tau) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{bmatrix} + [0] u(\tau) \quad (18b)$$

Cabe ressaltar o fato da matriz da dinâmica do sistema **A** ser uma matriz tridiagonal, o que trará reconhecidas facilidades de manipulação algébrica. Por exemplo, para obter a solução do sistema em regime permanente, onde $\dot{x} = [0]$, poderá ser utilizado um método algébrico clássico, como o método de Thomas (Thomas, 1949).

3.4. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

O método de Runge-Kutta de quarta ordem para a aproximação da derivada primeira com relação ao tempo vem da expansão da série de Taylor, tendo erro de truncamento por passo da ordem de $O(\Delta \tau^5)$, enquanto o erro acumulativo dos vários passos é de quarta ordem.

Destaca-se que ao ser refinada a malha, sendo o erro função do incremento de tempo, o erro diminuirá, tendendo a zero no limite em que $\Delta \tau \rightarrow 0$.

Para representar a aplicação do método de Runge-Kutta em um sistema de equações diferenciais é conveniente escrever o sistema em sua forma autônoma. Um sistema autônomo é um sistema de equações diferenciais ordinárias que não depende das variáveis independentes, no caso, não depende explicitamente do tempo. Definindo arbitrariamente um sinal de controle proporcional à variável de estados dada por realimentação de estados, de ganho \mathbf{k} , tem-se a equação (19).

$$\mathbf{u}(\tau) = -\mathbf{k} \mathbf{x} \quad (19)$$

Aplicando (19) no sistema linear (11a) tem-se o sistema autônomo (20).

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{Bk}) \mathbf{x}(\tau) \quad (20)$$

O método de Runge-Kutta de quarta ordem para o sistema linear é apresentado na equação (21).

$$\mathbf{x}(\tau + \Delta \tau) = \mathbf{x}(\tau) + \frac{\Delta \tau}{6}(\mathbf{f}_1 + 2 \mathbf{f}_2 + 2 \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4) \quad (21)$$

em que,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x} + \frac{\Delta \tau}{2} \mathbf{F}_1\right) \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x} + \frac{\Delta \tau}{2} \mathbf{F}_2\right) \\ \mathbf{f}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \tau \mathbf{F}_3) \end{aligned}$$

3.5. ESTABILIDADE, CONSISTÊNCIA E CONVERGÊNCIA DE MALHA

Pelo Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer (Lax e Richtmyer., 1956), tem-se que um esquema de diferenças finitas é convergente se, e somente se, ele é consistente e estável.

Segue uma definição bem aceita de consistência de esquema de diferenças finitas (Thomas, 1998; Strikwerda, 2004): Um esquema de diferenças finitas é consistente se a solução exata de sua equação diferencial parcial satisfaz o esquema no limite quando os incrementos Δx e Δt tendem zero.

Dados os erros do método de Runge-Kutta de 4ª ordem em função do tempo e o erro da aproximação por diferenças finitas centrada de segunda ordem em função de Δx , é fácil notar que esses erros convergem para zero enquanto se reduz os incrementos da malha, provando-se que o esquema é consistente.

A estabilidade é a capacidade de apresentar pequenas variações na resposta ao serem impostas pequenas variações nas condições iniciais. Uma vez que o Método das Linhas faz decidir *a priori* uma malha de discretização do espaço, permitindo utilizar quaisquer métodos para aproximação da integral no tempo, é comum estudar a estabilidade do Método das Linhas pela ótica da estabilidade do seu algoritmo de integração no tempo, ou seja, no presente caso, pela estabilidade do método de Runge Kutta de 4ª ordem.

Para o método de Runge-Kutta é usual utilizar o conceito de *estabilidade no sentido de Lax* (L-estabilidade). É uma condição necessária, mas não suficiente para (L-)estabilidade que os autovalores do operador espacialmente discretizado, em combinação com um passo de tempo máximo, fiquem restritos a uma região de estabilidade S (Reddy e Trefethen, 1992).

As funções de estabilidade dos Métodos de Runge-Kutta já foram amplamente estudadas na literatura (Prentice, 2011). Segue a equação (22) apresentando a função de estabilidade do método explícito de Runge Kutta de quarta ordem.

$$R(s \Delta \tau) = 1 + s \Delta \tau + \frac{(s \Delta \tau)^2}{2!} + \frac{(s \Delta \tau)^3}{3!} + \frac{(s \Delta \tau)^4}{4!} \quad (22)$$

Para que sejam calculados os autovalores s , segue na equação (23) o problema de autovalores associado ao sistema da equação (20).

$$|s \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{Bk}| = 0 \quad (23)$$

Define-se a região de estabilidade como $S = \{ (s \Delta \tau) \in \mathbb{C} : |R(s \Delta \tau)| < 1 \}$. Deseja-se, então, encontrar um incremento de tempo $\Delta \tau$ que atenda a esse critério de estabilidade, sendo os autovalores s uma função do incremento pré-selecionado de espaço Δx e de uma escolha do ganho \mathbf{k} , que será justificada na seção seguinte.

Para uma melhor visualização do que seja a referida região de estabilidade S , segue um gráfico do Matlab[®] mostrando o contorno ∂S dessa região de estabilidade, na figura 8. Os valores $(s \Delta \tau)$ que atendem ao critério $|R(s \Delta \tau)| < 1$ estão no interior do contorno.

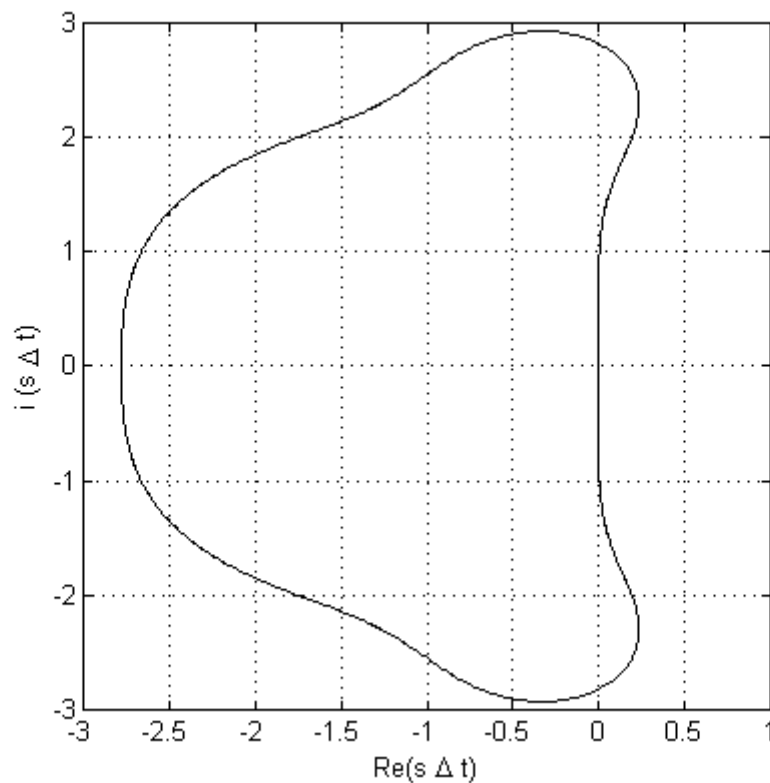


Figura 8. Contorno ∂S , da região de estabilidade para o método explícito de Runge-Kutta de 4ª ordem.

O critério definido acima foi aplicado para malhas de 52, 102 e 502 nós com respeito ao domínio do espaço, resultando em incrementos máximos de $\Delta \tau$ conforme apresentados na tabela 3.

Tabela 3 – Incrementos máximos de integração no tempo para L-estabilidade do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Número de nós da malha da aleta	Δx (m m)	$\Delta \tau_{\text{máx}}$	$\Delta t_{\text{máx}}$ (s)
50	3,0	$1,52 \times 10^{-04}$	0,100
100	1,5	$0,91 \times 10^{-04}$	0,060
500	0,3	$0,36 \times 10^{-05}$	0,024

Observa-se que ao refinarmos a malha de espaço, o passo $\Delta \tau$ máximo possível dentro da região de estabilidade do método diminuirá, fazendo com que o método avalie um número maior de pontos, mas, em contrapartida, aumentando o tempo computacional para convergência da simulação na temperatura de referência desejada. Adicionalmente, um incremento de integração muito pequeno pode ser prejudicial na execução do teste em bancada em tempo real, pois espera-se que o tempo real que a máquina leva para realizar um passo de integração seja menor que o incremento Δt alcançado com esse passo.

Em trabalho anterior (Barbosa, Bermeo e Orlande, 2013), foi apresentada a análise de estabilidade de Fourier para um esquema de diferenças finitas completo, centrado no espaço e avançado no tempo, conforme apresentado na equação (24).

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{m+1,j} - T_{m,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{[T_{m,j+1} - 2T_{m,j} + T_{m,j-1}]}{\Delta x^2} + \alpha \frac{hP}{kA} [T_{\infty} - T_{m,j}] \quad (24)$$

Onde foi determinada a seguinte condição de estabilidade, de equação (25).

$$\Delta t \leq \frac{2}{\alpha \left(\frac{hP}{kA} + \frac{3}{\Delta x^2} \right)} \quad (25)$$

É possível comparar a solução dada pelo Método da Linhas com avanço no tempo por Runge-Kutta com a solução dada pelo esquema de diferenças finitas completo.

Tabela 4 – Incrementos máximos da malha no tempo para condição de estabilidade da análise de Forrier do esquema de diferenças finitas.

Número de nós da malha da aleta	Δx (mm)	Δt_{\max} (s)
50	3,0	0,177
100	1,5	0,0442
500	0,3	$0,177 \times 10^{-02}$

Para incrementos da malha de espaço menores que $\Delta x = 0,3$ mm o esquema de diferenças finitas completo apresentou uma desvantagem frente ao Método das Linhas, uma vez que o passo de tempo máximo para estabilidade passa a ser muito pequeno. Opta-se por utilizar o Método das Linhas com avanço no tempo dado pelo método de Runge-Kutta.

Para o método selecionado, foi feito um estudo de convergência de malha para temperatura média da aleta em regime permanente com temperatura de referência na base da aleta de 100 °C. Os resultados podem ser verificados no gráfico da figura 9.

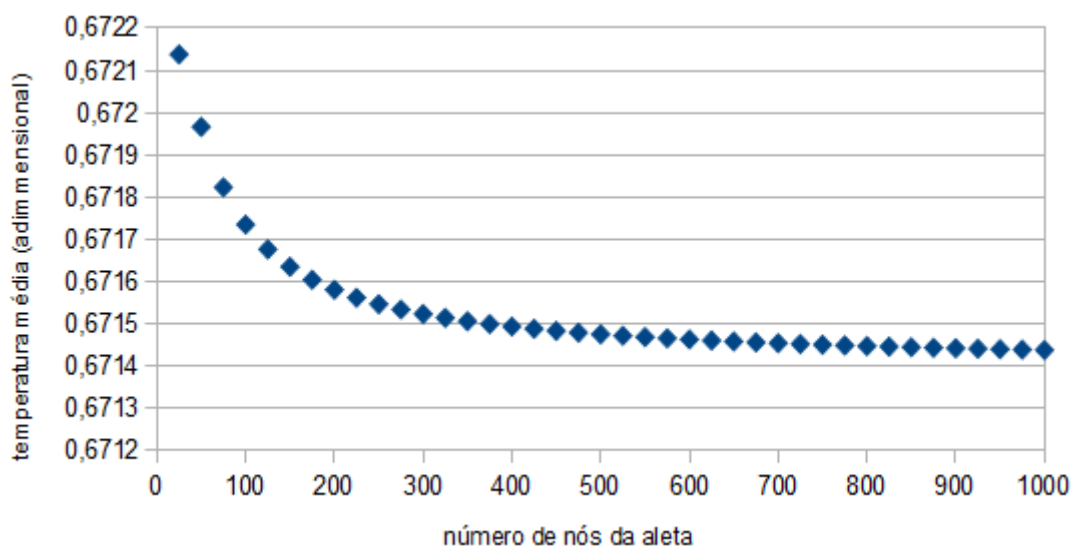


Figura 9. Convergência de malha para temperatura média em regime permanente.

4. PROJETO E ANÁLISE DO SISTEMA DE CONTROLE

Nessa seção será apresentado um estudo da controlabilidade e observabilidade para o modelo matemático em espaço de estados ora proposto. Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos na segunda metade do século passado pelo engenheiro Rudolf Emil Kalman. A maioria dos sistemas físicos são controláveis e observáveis, porém seus modelos matemáticos podem não apresentar controlabilidade ou observabilidade (Kalman *apud* Ogata, 2003).

Em seguida, será calculado o ganho do regulador linear-quadrático ótimo (Kalman, 1960a) e do observador de estados de Luenberger (Luenberger, 1964; Luenberger, 1979). Finalmente, será proposta uma arquitetura para o sistema de controle de malha fechada com referência não-nula.

Uma descrição do aparato experimental do sistema de controle, com seus elementos, sua montagem e uma breve descrição de sua utilização serão fornecidas a fim de garantir minimamente a repetibilidade e reprodutibilidade dos resultados.

4.1. CONTROLABILIDADE COMPLETA DE ESTADO

Um sistema é dito controlável quando, através de um sinal de controle, for possível transferir o sistema de um estado inicial para qualquer estado final, em um intervalo de tempo finito (Ogata, 2003). Como decorrência dessa definição, dadas as matrizes $\mathbf{A}(n \times n)$ e $\mathbf{B}(n \times r)$, para se verificar a controlabilidade completa de estados deve-se garantir que os vetores $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ sejam linearmente independentes.

A matriz formada pelos vetores $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ é denominada matriz de controlabilidade. Dizer que esses vetores são linearmente independentes equivale a dizer que a matriz de controlabilidade tem posto n .

Foi implementado, conforme anexo 2, o critério exposto acima. Porém, este critério não se mostrou conveniente do ponto de vista numérico pois, a medida que a malha foi sendo refinada, ou seja, conforme o número de nós aumenta os valores de \mathbf{A}^{n-1} crescem muito rapidamente, atingindo o limite de precisão da máquina retornando assim o valor “*inf*”. Desse modo, não foi possível avaliar numericamente o posto dessa matriz.

Entretanto, um teste alternativo para controlabilidade completa é proposto na literatura (Ogata, 2003). O teste alternativo garante a controlabilidade completa de estado se nenhuma linha da matriz dada pelo produto $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}$ tiver todos os elementos nulos, onde \mathbf{W} é um vetor de transformação, tal que, $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{T}$, sendo \mathbf{T} uma matriz diagonal, de onde decorre que o vetor \mathbf{W} promove a diagonalização da matriz \mathbf{A} . Utilizando o novo teste observou-se controlabilidade completa de estado nesse sistema, mesmo para malhas com incrementos muito pequenos, ou seja, com um grande número de nós. Esse teste foi realizado para o sistema linear (18a) em questão, sendo garantida controlabilidade completa para todas as malhas testadas, até 2.002 nós. Os comandos de Matlab[®] do teste constam do anexo 2.

4.2. CONTROLABILIDADE COMPLETA DE SAÍDA

Para aplicações práticas de sistemas de controle moderno é usual controlar uma saída ao invés de garantir controlabilidade completa de estados. Dados $\mathbf{A}(n \times n)$, $\mathbf{B}(n \times r)$,

$\mathbf{C}(m \times n)$ e $\mathbf{D}(m \times r)$, temos que o sistema é de saída completamente controlável se a matriz de controlabilidade de saída tiver posto m . A matriz de controlabilidade é dada por $[\mathbf{C}\mathbf{B} \mid \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \mid \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \mid \mathbf{D}]$.

Para a formulação matemática proposta, a dimensão n é igual a $N+2$, que é o número de variáveis de estado – os N nós da malha da aleta mais as duas temperaturas da base e do bloco. Temos ainda a dimensão m é igual a 1, bem como a dimensão r . Foi calculado o posto na matriz de controlabilidade de saída, sendo garantida a controlabilidade de saída do sistema em questão para todas as malhas testadas até 2.002 nós, sempre retornando o posto $m = 1$. Os comandos de Matlab[®] do teste da controlabilidade de saída constam do anexo 2.

4.3. OBSERVABILIDADE COMPLETA DE ESTADOS

Um sistema é completamente observável se cada transição de estado puder afetar cada elemento do vetor de saída. Assim qualquer estado inicial pode ser determinado pela observação do vetor saída durante um intervalo de tempo finito (Ogata, 2003).

Como decorrência dessa definição, em desenvolvimento análogo ao empregado quando foi avaliada a controlabilidade completa de estados, é definida uma matriz denominada matriz de observabilidade de estados.

Essa matriz de observabilidade é dada por $[\mathbf{C} \mid \mathbf{C}\mathbf{A} \mid \dots \mid \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}]$, sendo o sistema completamente observável se essa matriz tiver posto n . Em testes feitos com esse critério, conforme cálculos presentes no anexo 2, a avaliação do posto da matriz de observabilidade retornou sempre o valor 01(um), de modo que não se pode garantir

observabilidade completa de estados para o para \mathbf{A} , \mathbf{C} proposto, em que \mathbf{C} propõem a observação de apenas um ponto da malha de espaço.

4.4. ESTABILIZABILIDADE

Para sistemas parcialmente controláveis, se os modos não controláveis forem estabilizáveis e os modos instáveis forem controláveis, o sistema será estabilizável (Ogata, 2003). Tem-se comumente a avaliação de estabilidade assintótica de uma matriz através dos seus autovalores. Se os autovalores de \mathbf{A} tem suas partes reais negativas, então \mathbf{A} é assintoticamente estável. Já para o problema do sistema de controle em questão, há interesse de se avaliar a estabilidade de $\mathbf{A} - \mathbf{Bk}$. Assim, é dito que que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) possuirá estabilizabilidade a partir de uma determinada escolha de \mathbf{k} .

No sistema de controle em questão, quaisquer escolhas de malha com respeito ao espaço levaram ao problema de autovalores $|\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{Bk}| = 0$, da equação (23), em que todos os autovalores \mathbf{s} , soluções do problema, tiveram suas partes reais negativas. Para esse cálculo, foi utilizado o valor do ganho \mathbf{k} do regulador Linear-Quadrático Ótimo (LQR), conforme apresentado na subseção seguinte.

4.5. REGULADOR LINEAR-QUADRÁTICO ÓTIMO (LQR)

Sistemas de controle cuja entrada de referência é constante ou nula, como é o sistema de controle térmico proposto para o presente trabalho, são chamados de sistemas reguladores. Retomamos aqui o sinal de controle proporcional à variável de

estados dada por realimentação de estados, definindo arbitrariamente na equação (19).

$$u(\tau) = -\mathbf{k} \mathbf{x}(\tau)$$

onde \mathbf{k} é uma matriz de ganho proporcional à realimentação.

A arquitetura desse sistema regulador ótimo de malha fechada com sinal de referência nulo é dada pelo diagrama de blocos da figura 10.

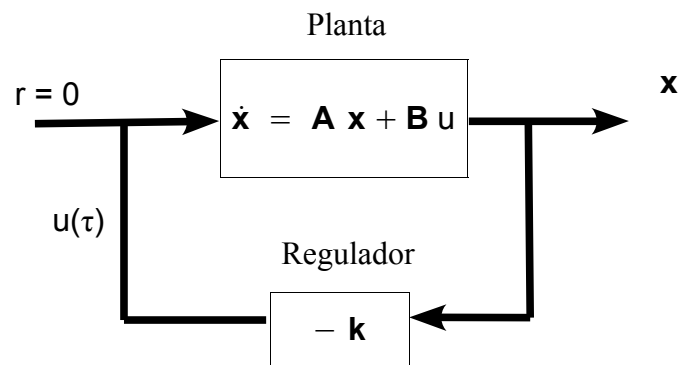


Figura 10. Diagrama de blocos do controle de malha fechada

Pode-se notar a partir da equação (19), e do diagrama de bloco representado na figura 10 que, sendo o sinal de referência nulo, $r = 0$, o sinal de controle $u(\tau)$ somente será nulo quando o vetor de estados $\mathbf{x}(\tau)$ também for nulo. Portanto, em regime permanente, a solução do sistema converge para o valor $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$,

Deseja-se calcular um matriz de ganho \mathbf{k} para o regulador Linear-Quadrático Ótimo (LQR). Denomina-se regulador Linear-Quadrático Ótimo de Kalman (Kalman, 1960a) o regulador que atua sobre um sistema de dinâmica linear e cujo ganho \mathbf{k} é calculado pela minimização de uma função custo quadrática. Calcular o ganho do regulador ótimo envolve dois problemas: garantir estabilidade (uma restrição); e otimizar o regulador (um objetivo). Otimizar o regulador significa minimizar a função

custo representada pelo índice de desempenho J_{LQR} , da equação (26).

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^* \mathbf{R} u) d\tau \quad (26)$$

Onde a matriz \mathbf{Q} e o parâmetro \mathbf{R} determinam a importância relativa do erro e do consumo de energia, respectivamente. Nesse ponto do projeto de controle nota-se que a minimização do índice de desempenho J nos leva ao denominado controle ótimo. Não obstante da denominação controle ótimo, a característica ótima do regulador não depende apenas da minimização de J_{LQR} , mas também de uma escolha de projeto, que pode privilegiar a importância relativa do erro em detrimento da importância do consumo de energia, e *vice versa*, ou ainda tentar um balanço aceitável entre os dois parâmetros.

Uma estimativa conservadora para a escolha desses parâmetros é dada pela regra de Bryson (Bryson e Ho, 1975), onde se escolhe matrizes diagonais \mathbf{Q} e \mathbf{R} de modo a normalizar as variáveis da função custo em relação a um máximo valor aceitável. Os elementos das diagonais principais das “matrizes” \mathbf{Q} e \mathbf{R} (sendo que no presente caso \mathbf{R} é uma matriz 1x1) estão representados na expressão abaixo.

$$Q_{i i} = \frac{1}{\text{maior valor aceitável de } x_i^2}$$
$$R_{j j} = \frac{1}{\text{maior valor aceitável de } u_j^2}$$

Em alguns casos a escolha pela regra de Bryson não acarreta dinâmicas adequadas ao projeto. Sendo assim, se faz necessário refinar os parâmetros de custo em

um processo iterativo partindo do valor obtido pela regra de Bryson, ou ainda, procurar outros métodos mais elaborados para avaliação desses parâmetros. Para o projeto do sistema térmico deste trabalho foi usada a regra de Bryson como estimativa inicial de \mathbf{Q} e \mathbf{R} , sendo seguida de um processo de tentativa e erro buscando valores de \mathbf{R} que acarretassem resultados adequados à aplicação em questão, como será apresentado adiante na seção que discute os resultados.

Aplicando (19) em (26), resulta na equação (27a) abaixo.

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{x} + \mathbf{k}^* \mathbf{R} \mathbf{k}) \mathbf{x} \, d\tau \quad (27a)$$

Supondo a existência de uma matriz definida positiva \mathbf{P} que soluciona a integral, tem-se a equação (27b).

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{k}^* \mathbf{R} \mathbf{k}) \mathbf{x} \, d\tau = -(\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x}) \Big|_0^{\infty} = \mathbf{x}^*(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^*(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (27b)$$

Supondo ainda que todos os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k})$ tenham suas partes reais negativas, portanto, que o par de matriz (\mathbf{A}, \mathbf{B}) possui estabilizabilidade, então temos no regime permanente que a variável de estado converge para zero, $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$, para um sistema de realimentação de estados com sinal de referência nulo. Conseqüentemente, a equação (27b) é simplificada em (27c), atendendo assim a restrição do problema de otimização com respeito a estabilidade.

$$J = \mathbf{x}^*(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (27c)$$

O índice de desempenho J_{LQR} pode ser obtido em termos da condição inicial $\mathbf{x}(0)$ e de \mathbf{P} , conforme apresentado na equação (25c). Após ser efetuada alguma manipulação algébrica, tem-se que o mínimo de J_{LQR} em relação a \mathbf{k} ocorre quando a equação (28) é satisfeita.

$$\mathbf{k} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} \quad (28)$$

Portanto, a lei de controle ótimo do problema é linear e é dada pela seguinte expressão.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k} \mathbf{x}(\tau) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau)$$

A matriz \mathbf{P} pode ser determinada a partir da solução da equação (29) abaixo, que é uma forma reduzida da Equação de Riccati.

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (29)$$

As plataformas Scilab[®] e Matlab[®] dispõem de rotinas para resolver a Equação Algébrica de Riccati, não cabendo ao escopo desse projeto desenvolver sua solução analítica. Comandos de Matlab[®] para realizar os cálculos presentes nesta seção constam do anexo 1.

4.4. ESTIMADOR DE ESTADOS (OBSERVADOR DE LUENBERGER)

Não é possível medir na bancada todas as variáveis de estado do presente trabalho, se fazendo necessário obter uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ das variáveis de estado a fim de calcular o sinal de controle $u(\tau)$. A equação (30) fornece um sinal de controle proporcional à estimativa de estado.

$$u(\tau) = -\mathbf{k} \hat{\mathbf{x}}(\tau) \quad (30)$$

O erro $\mathbf{e}(\tau)$ referente a essa estimativa pode ser avaliado a partir da diferença entre o valor real da variável de estado e seu valor estimado.

$$\mathbf{e}(\tau) = \mathbf{x}(\tau) - \hat{\mathbf{x}}(\tau)$$

Reescrevendo a equação (18a) em termos da estimativa da variável de estados $\hat{\mathbf{x}}$, tem-se a equação (31).

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} u \quad (31)$$

Subtraindo (31) de (18a), obtém-se (32).

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{e} \quad (32)$$

A partir da equação (32) a variação do erro não depende do sinal de controle. Outra decorrência dessa equação é que se \mathbf{A} for instável, o erro cresce ilimitadamente. A

fim de mitigar a possível instabilidade, é introduzido um termo de correção de ganho \mathbf{L} , conhecido como ganho do observador de Luenberger (Luenberger, 1964; Luenberger 1979). O matemático David Luenberger foi o primeiro a apresentar o conceito de estimadores de estados, os quais ele chamava de observadores. O sistema de controle com o observador de Luenberger é apresentado no sistema de equações (33a,b).

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} u + \mathbf{L} (y - \hat{y}) \quad (33a)$$

$$\hat{y} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} \quad (33b)$$

A estimativa do vetor de estados $\hat{\mathbf{x}}$ leva a uma estimativa do vetor de leitura \hat{y} em (33b). Quando o erro da estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ é pequeno, o erro de \hat{y} também é pequeno, fazendo com que o termo de correção em \mathbf{L} tenda a zero. Entretanto, quando o erro da estimativa do vetor de estados aumenta, o erro da estimativa do sinal de leitura também aumenta, e nesse caso o termo de correção em \mathbf{L} atuará. Substituindo (33a) em (32) obtém-se a equação (34) que dá erro da estimativa após a introdução do termo de correção.

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L} (\mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) \mathbf{e} \quad (34)$$

A escolha do ganho do observador \mathbf{L} pode conferir estabilizabilidade ao problema $(\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C})$, independente da estabilidade de \mathbf{A} . Ao aplicar (33) e (32) em (18), obtém-se a equação (35) do estimador de estados.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} u + \mathbf{L} y = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C} - \mathbf{B} \mathbf{k}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L} y \quad (35)$$

Na figura 11 é apresentado o diagrama de blocos do sistema de controle de malha fechada com referência nula, compreendendo as equações do sistema (18a) e (18b), a equação do estimador de estados (35) e a equação do regulador de ganho proporcional (30).

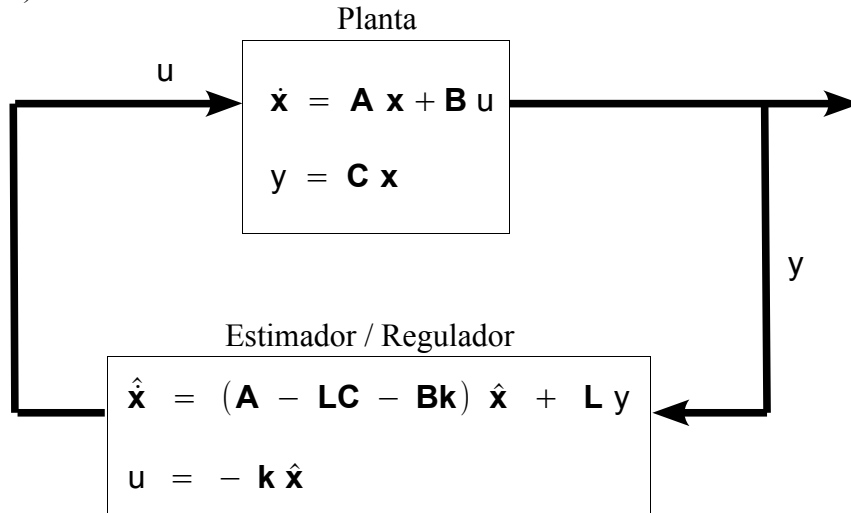


Figura 11. Diagrama de blocos do sistema de controle de malha fechada

Reescrevendo as equações do estimador e do regulador (34) e (30) em função do erro, substituindo \hat{x} por $(x - e)$, tem-se o sistema de equações (36).

$$\dot{e} = (A - LC) e \quad (36a)$$

$$u = -k (x - e) \quad (36b)$$

Reescrevendo as equações da dinâmica do sistema (18a) e (18b) em função do erro, substituindo a equação (36b) em (18a), tem-se o sistema de equações (37).

$$\dot{x} = (A - B k) x + B k e \quad (37a)$$

$$y = C x \quad (37b)$$

Um dos teoremas centrais da teoria de controle moderno é o princípio da separação do estimador e do controle. Pelo princípio da separação, o sistema de controle de malha fechada apresentado nas equações (36) e (37) será estável se: a dinâmica do regulador ($\mathbf{A} - \mathbf{Bk}$) for estável; e, se a dinâmica do estimador ($\mathbf{A} - \mathbf{LC}$) também for estável (Joseph and Tou, 1961; Potter, 1964).

É preciso selecionar os autovalores do observador de modo que a dinâmica do estimador de estados ($\mathbf{A} - \mathbf{LC}$) seja estável. Nota-se que o problema de encontrar polos estáveis através da seleção do ganho \mathbf{L} do estimador guarda forte semelhança com o problema desenvolvido no cálculo do ganho ótimo do regulador linear-quadrático.

De fato, os dois problemas são matematicamente os mesmos, e essa propriedade é denominada dualidade. O acoplamento dos dois problemas leva a um problema de autovalores dual de quarta ordem cuja equação característica é apresentada em (38), onde s é(são) o(s) autovalor(es) que satisfaz(em) o problema. O desenvolvimento a seguir foi extraído de (Ogata, 2003).

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{Bk}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = 0 \quad (38)$$

Decorre dessa dualidade um resultado muito útil para o cálculo do ganho \mathbf{L} do estimador: os polos que fazem a dinâmica de ($\mathbf{A} - \mathbf{Bk}$) estável também farão a dinâmica de ($\mathbf{A} - \mathbf{LC}$) estável!

Dado o sistema dual das equações (39) abaixo.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^* \mathbf{z} + \mathbf{C}^* \mathbf{v} \quad (39a)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}^* \mathbf{z} \quad (39b)$$

O sinal de controle v , de ganho proporcional \mathbf{k}_d , será dado pela seguinte expressão.

$$v = \mathbf{k}_d \mathbf{z}$$

Em análise semelhante a aplicada ao problema de controle original, os autovalores do problema dual são dados pela solução do polinômio característico do problema dual: $|sI - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{k}_d)| = 0$. Deseja-se que a dinâmica desse sistema dual seja estável, o que pode ser garantido assumindo que seus autovalores sejam os mesmos autovalores do problema do regulador linear-quadrático ótimo, obtidos na subseção anterior, conforme anexo 1.

Sabe-se que os autovalores do sistema dual $(\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{k}_d)$ são os mesmos autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{k}_d^*\mathbf{C})$. Comparando o polinômio característico $|sI - (\mathbf{A} - \mathbf{k}_d^*\mathbf{C})|$ com o polinômio característico do observador $|sI - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})|$, e posto que ambos tem os mesmos autovalores, decorre de maneira óbvia a relação apresentada em (40).

$$\mathbf{L} = \mathbf{k}_d^* \tag{40}$$

Assim, o cálculo do ganho \mathbf{L} é dado pelo cálculo do conjugado transposto \mathbf{k}_d^* , que é o ganho que satisfaz o polinômio característico $|sI - (\mathbf{A} - \mathbf{k}_d^*\mathbf{C})|$ assumindo os autovalores do regulador linear-quadrático ótimo. A plataforma Matlab[®] possui um algoritmo (Kaltusky, et al., 1985) implementado para calcular um ganho que satisfaça as condições descritas. Os comandos do Matlab[®] para o cálculo do ganho \mathbf{L} são

apresentados no anexo 1.

O sistema de controle com regulador linear quadrático ótimo (LQR) e com observador de Luenberger atende especificamente ao sistema linear proposto. Contudo, caso houvesse no sistema um termo não-homogêneo de distúrbio, como um ruído branco Gaussiano, seria mais apropriado implementar outro tipo de estimador de estados linear, como o filtro de Kalman, resultando no chamado sistema de controle Linear-Quadrático Gaussiano (LQG) (ATHANS, 1971). Adicionalmente, se fosse o problema proposto fosse modelado por um sistema com termos não lineares, que seria uma decorrência óbvia de não realizar a linearização da equação (2b), seria necessário implementar um estimador de estados não-linear, ou desenvolver hipóteses de linearização, como as hipóteses que foram desenvolvidas no presente trabalho.

4.5. AJUSTE DE REFERÊNCIA NÃO-NULA

Deseja-se fazer o sinal de saída medido $y(\tau)$ convergir para um valor de referência não-nulo, $y(\infty) \rightarrow r$, em um estado de equilíbrio, $\partial \mathbf{x} / \partial \tau = 0$. Para que a temperatura seja mantida constante no referido estado de equilíbrio, as perdas de calor por convecção tem que ser compensadas pelo termo de geração da resistência elétrica. Sendo assim, assume-se um estado permanente $\bar{\mathbf{x}}$ e um sinal de controle $\bar{\mathbf{u}}$ correspondente à manutenção do regime permanente, com sinal de saída igual ao valor de referência r .

O sistema de equações (41a,b) apresenta o sistema linear (18) em regime permanente.

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) \rightarrow \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} = [0] \quad (41a)$$

$$\mathbf{y}(\infty) \rightarrow \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}} = r \quad (41b)$$

O sistema linear (41) pode ser reescrito na forma matricial (41c).

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [0] \\ r \end{bmatrix} \quad (41c)$$

As equações (42a) e (42b) apresentam as soluções \mathbf{F} e \mathbf{N} do sistema linear (41).

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F} r \quad (42a)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N} r \quad (42b)$$

A equação (19) expressa um sinal de controle proporcional que leva à convergência para um sinal de leitura nulo, dado que a referência é zero. É proposto adicionar ao sinal de controle da equação (19) o sinal de controle $\bar{\mathbf{u}}$ correspondente à potência necessária para manutenção do regime permanente. Por sua vez, a equação (35) apresenta uma expressão para estimar os estados do sistema. É proposta uma alteração para que o estimador calcule diretamente a diferença entre o estado estimado e o estado de referência do regime permanente $\bar{\mathbf{x}}$. Conforme exposto, para um ajuste de referência não-nula as equações (43a) e (43b) expressam de forma mais adequada o sistema regulador/observador.

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC - Bk)\hat{x} + L(C\bar{x} - y) \quad (43a)$$

$$u = k\hat{x} + \bar{u} \quad (43b)$$

A figura 12 mostra em diagrama de blocos o sistema de controle de malha fechada com o sistema regulador/observador da equação (43) localizado no ramo de realimentação. Por simplicidade, foi usada a notação $v = (C\bar{x} - y)$. Essa arquitetura do controle foi proposta por Hespanha (Hespanha, 2007; Hespanha, 2009, Hespanha, 2014).

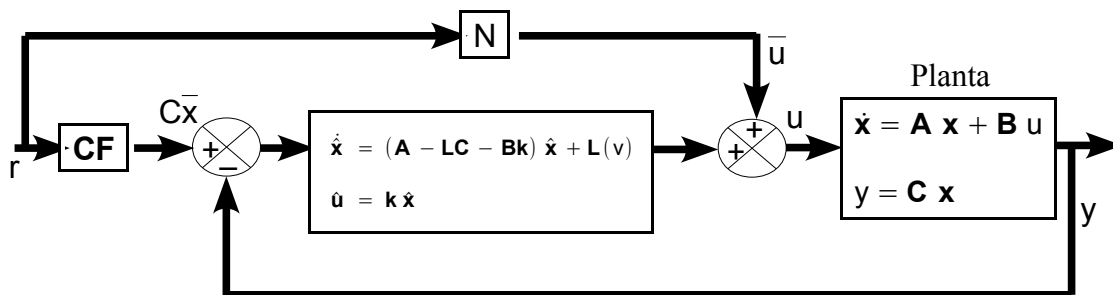


Figura 12. Controle com observador e regulador no ramo direto.

Uma prova preliminar do controle da equação (43) foi proposta na literatura (Hespanha 2007), conforme segue. É definida a seguinte transformação da variável de estados na equação (44).

$$\tilde{x} = x - \bar{x} + \hat{x} \quad (44)$$

Logo,

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \quad (45)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - Bk)\hat{x} + LC\tilde{x} \quad (46)$$

Seja $(A - LC)$ assintoticamente estável, estabilizável pela seleção de L , pode-se concluir a partir da equação (45) que $\tilde{x} \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$. Na prática, pode-se considerar o estado do controlador \hat{x} como uma estimativa de $\bar{x} - x$. Adicionalmente, seja $(A - BK)$ assintoticamente estável, pode-se concluir a partir da equação (46) que $\hat{x} \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

4.6. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O aparato experimental utilizado especificamente neste trabalho compreende:

(i) um bloco de alumínio de 85×38×20 mm, bipartido, possuindo dois furos passantes em sua direção principal de diâmetro nominal 9.5 mm, uma rosca interna e um parafuso allen para aperto de suas seções bipartidas uma contra a outra.;

(ii) uma aleta cilíndrica de latão, com 280 mm de comprimento e 9.5 mm de diâmetro nominal;

(iii) um resistor térmico cilíndrico, com 60 mm de comprimento e 9.5 mm de diâmetro nominal, de potência nominal 150 W e voltagem nominal 115 V;

(iv) um material isolante para apoio do bloco de alumínio sobre a bancada;

(v) uma bancada para o suporte de todo aparato experimental;

(vi) um módulo de potência proporcional, de nome comercial “SSRP-40AR” do fabricante Samrello[®], cujo manual é citado como referência (Samrello, 2010);

(vii) uma rede de alimentação de energia elétrica do laboratório;

(viii) um sistema de aquisição de dados via Ethernet com chassi para módulos modelo NIcDAQ 9188, da National Instruments™, cujo manual é citado como referência (National Instruments, 2013);

(ix) um módulo para aquisição de dados de termopares NI 9213, da National Instruments™;

(x) um módulo de saída de sinal analógico NI 9264, da National Instruments™;

(xi) um termopar tipo “T” (cobre-constantan), com capacidade de -270 a 400 °C;

(xii) um termopar tipo “J” (ferro-constantan), com capacidade de -40 a 750 °C; e

(xiii) um computador de mesa com um processador Intel (R) Core (TM) 2 CPU 6360, de velocidade nominal 1,86GHz para cada núcleo, e memória flexível 3,24 GB RAM, dispo do software Matlab e dos arquivos dos anexos 1 e 2, e o software Simulink dispo de uma arquitetura de controle semelhante àquela apresentada na figura 12.

Segue a figura 13, que é uma fotografia mostrando alguns dos elementos do aparato experimental usado neste trabalho.

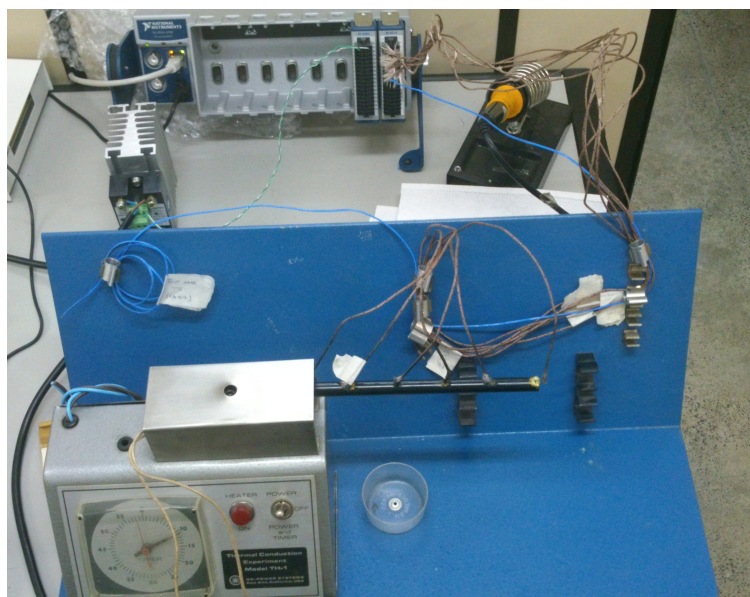


Figura 13. Fotografia mostrando elementos do aparato experimental.

A montagem do aparato experimental compreende as etapas de:

(i) inserir a aleta e a resistência elétrica nos furos passantes do bloco de alumínio, ambas revestidas com uma folha de alumínio na seção inserida para um melhor contato térmico com o bloco e eliminação de folgas anulares;

(ii) apertar o parafuso allen para fixação;

(iii) apoiar o bloco de alumínio sobre o material isolante, disposto sobre a bancada;

(iv) fixar o termopar tipo “J” na base da aleta, região adjacente a seção engastada da aleta ;

(v) fixar o termopar tipo “T” na bancada, deixando sua extremidade livre para leitura da temperatura ambiente;

(vi) ligar os cabos elétricos dos termopares nas entradas apropriadas do módulo NI 9213;

(vii) ligar os cabos da resistência elétrica no módulo de potência, e o cabo do módulo de potência à rede de alimentação de energia elétrica do laboratório;

(viii) ligar a saída do módulo NI9264 à entrada de sinal do módulo de potência por meio de cabos elétricos;

(ix) conectar os módulos NI9264 e NI 9213 no chassi NI cDAQ 9188;

(x) conectar o chassi NI cDAQ 9188 ao computador por meio de um cabo Ethernet;

Segue abaixo uma figura 14, que é uma representação esquemática mostrando os principais elementos do aparato experimental em sua configuração montada.

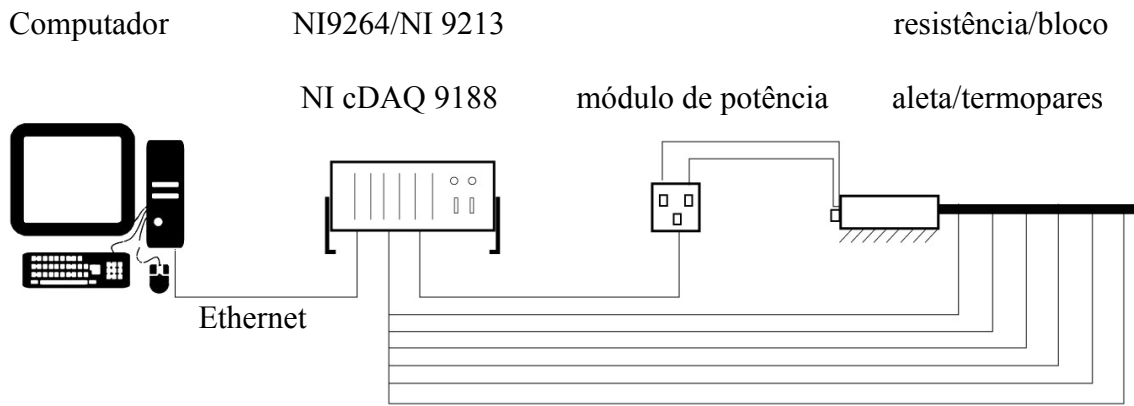


Figura 14. Representação esquemática do aparato experimental montado

A realização do ensaio consiste nas seguintes etapas:

- (i) ligar o computador e o chassi NI cDAQ 9188;
- (ii) verificar se a temperatura inicial da aleta atende as necessidades de medição do ensaio em curso;
- (iii) verificar se todas as conexões estão de acordo com a descrição da montagem do aparato;
- (iv) rodar os comandos do anexo 1 no matlab, selecionando o tempo total de integração, o número de nós, a temperatura de referência e os parâmetros de erro e custo de energia adequados as necessidades de medição do ensaio em curso;
- (v) rodar o controle do diagrama de blocos da figura xx no Simulink;
- (vi) aguardar o término do tempo total de integração do sistema de controle;
- (vii) salvar saídas gráfica e o ambiente com todas as medições realizadas.
- (viii) aguardar o resfriamento da aleta para desmontar o aparato, ou para reiniciar o ensaio caso necessário.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O controle descrito na seção anterior foi aplicado para regular a temperatura da base da aleta do sistema térmico proposto. O controle projetado foi testado no modelo numérico apresentado acima e na bancada experimental para vários parâmetros de custo energia R , enquanto o custo relativo ao erro Q foi mantido constante a um valor determinado pela regra de Bryson, para um máximo erro aceitável de 1 °C. Para os testes realizados, foi usado como sinal de referência uma curva com três degraus de valores adimensionais 0.35, 0.5 e 1.0.

Quando se realiza o cálculo de soluções puramente adimensionais, é importante não perder de vista o sentido físico do problema, uma vez que foram feitas hipóteses para linearizar o problema proposto (vide a equação 2b). Sendo assim, a solução adimensional servirá somente para uma certa faixa de temperaturas dimensionais em torno das quais o problema de convecção foi linearizado.

Existem ainda outros problemas relacionados à natureza física do sistema, que não podem ser ignorados na análise das soluções adimensionais. Dentre esses problemas estão: as variações de propriedades com a temperatura; as variações dimensionais que influenciam os coeficientes de contato da aleta e da resistência elétrica com o bloco; a resistência estrutural de elementos de fixação e suporte da bancada; e, especificamente na bancada utilizada, a não linearidade do módulo de potência proporcional que recebe o sinal primário de controle e converte num sinal de controle com potência adequada para o funcionamento do resistor.

A fim de se recuperar o sentido físico do problema, pode-se redimensionalizar esses valores adimensionais com a aplicação da equação (17a), usando, por exemplo,

uma temperatura de referência 100 °C e temperatura ambiente de 23 °C. Sendo assim, os três degraus da curva de referência apresentada na figura 15 podem ser entendidos como temperaturas de 50 °C, 61,5 °C e 100 °C.

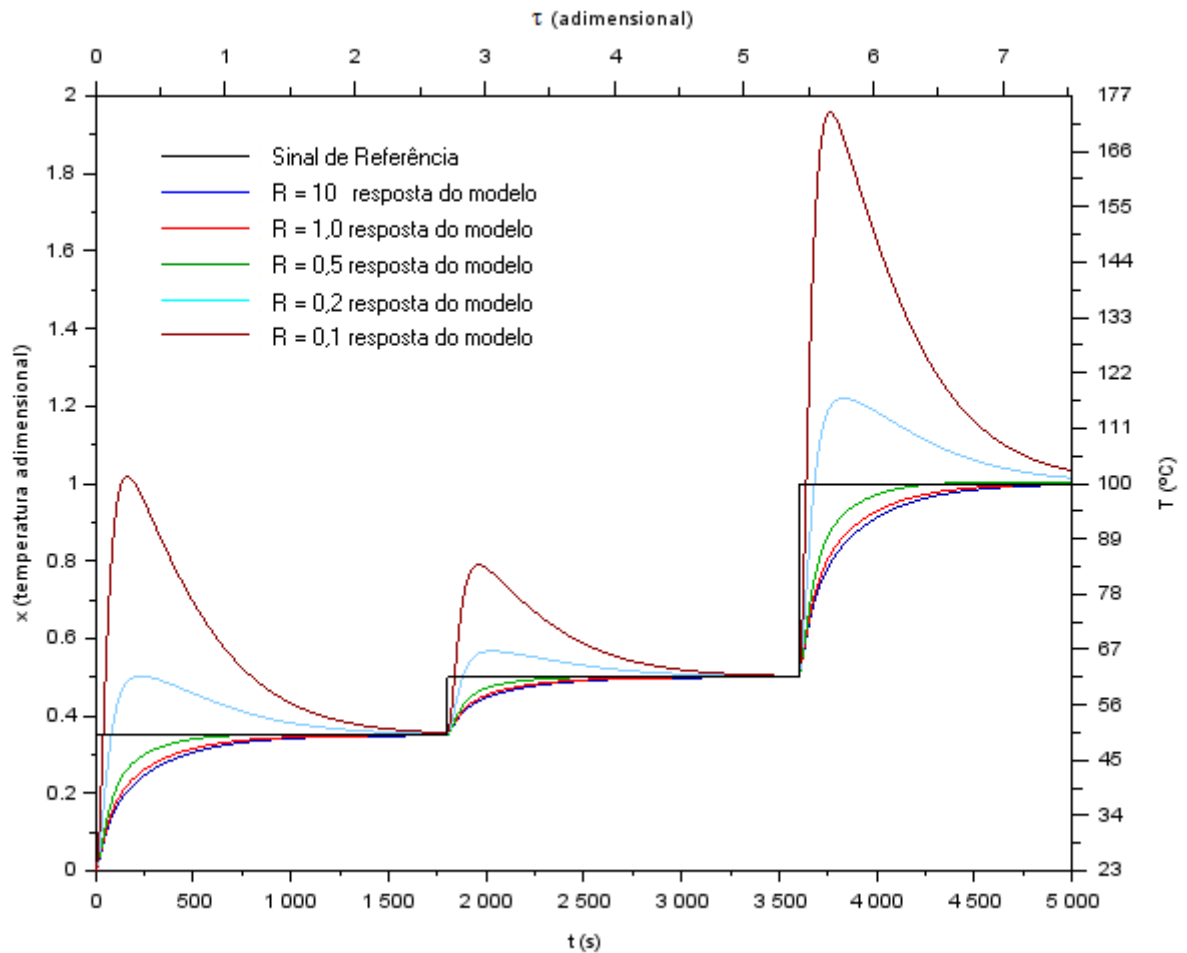


Figura 15. Resposta do Modelo Numérico com o tempo

A figura 15 mostra os resultados obtidos para a temperatura da base da aleta em função do tempo. Nessa figura, a linha preta representa o sinal de controle, e as linhas coloridas representam as respostas para simulação do sistema térmico controlado com $R = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ e 10^3 , sendo esses valores dimensionados W^{-2} . Destaca-se que são usados valores adimensionais de R e Q no cálculo de k e na equação (26). A

adimensionalização de R é feita a partir da equação (17d).

A partir da figura 15 é possível ver que a seleção de baixos parâmetros de economia de energia R resultam em altos sobressinais, e o sistema requer um tempo significativamente maior para atingir a convergência. Conforme o custo R é aumentado, o sobressinal diminui até desaparecer por volta do valor $R = 0.5$.

Os testes demonstraram que o sistema é bastante sensível para R na faixa de 0,1 a 1,0. Foi constatado que a resposta do sistema praticamente não é afetada para grandes valores do custo R . Um bom balanço entre o custo de energia e o erro aceitável foi encontrado para a faixa de R entre 0,5 e 1,0, com um baixo sobressinal e uma rápida convergência.

As figuras 16 a 18 mostram o controle atuando sobre a bancada experimental. Três temperaturas de referência foram testadas para esse experimento: 35, 50 e 100 °C. O custo de erro Q foi dado pela regra de Bryson, para um erro máximo erro aceitável de 1 °C, enquanto o custo de energia foi mantido $R = 1.0 \text{ W}^{-2}$ para todos os testes. O gráfico mostra que o sistema de controle projetado no presente trabalho é capaz de responder acuradamente, de modo estável e rápido, às mudanças de estado devido a entrada em degrau de um sinal de referência. Oscilações observadas nas temperaturas lidas podem decorrer de perturbações na temperatura ambiente, entre outros fatores.

A adimensionalização do gráfico das figuras 16 foi realizada de modo semelhante àquela da figura 15, com respeito a referência 35 °C e considerada a temperatura ambiente constante e igual a 20 °C, que foi aproximadamente a temperatura ambiente média observada durante o ensaio na bancada.

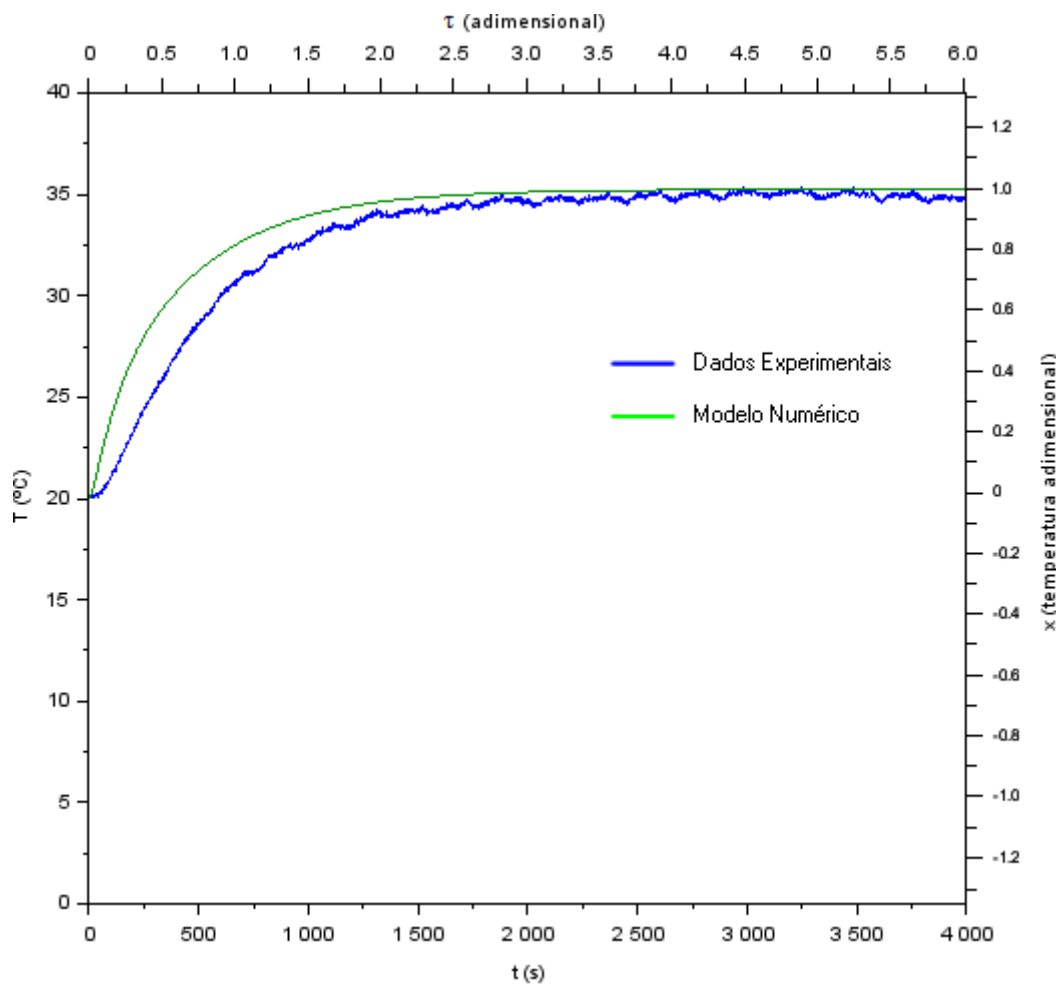


Figura 16. Comparação entre o Modelo Numérico e os Dados Experimentais para uma temperatura de referência 35 °C.

A adimensionalização do gráfico da figura 17 foi realizada de modo semelhante as outras figuras apresentadas, sendo esta com respeito a referência de 50 °C e considerando a temperatura ambiente constante e igual a 23 °C, que foi aproximadamente a temperatura ambiente média observada durante o ensaio.

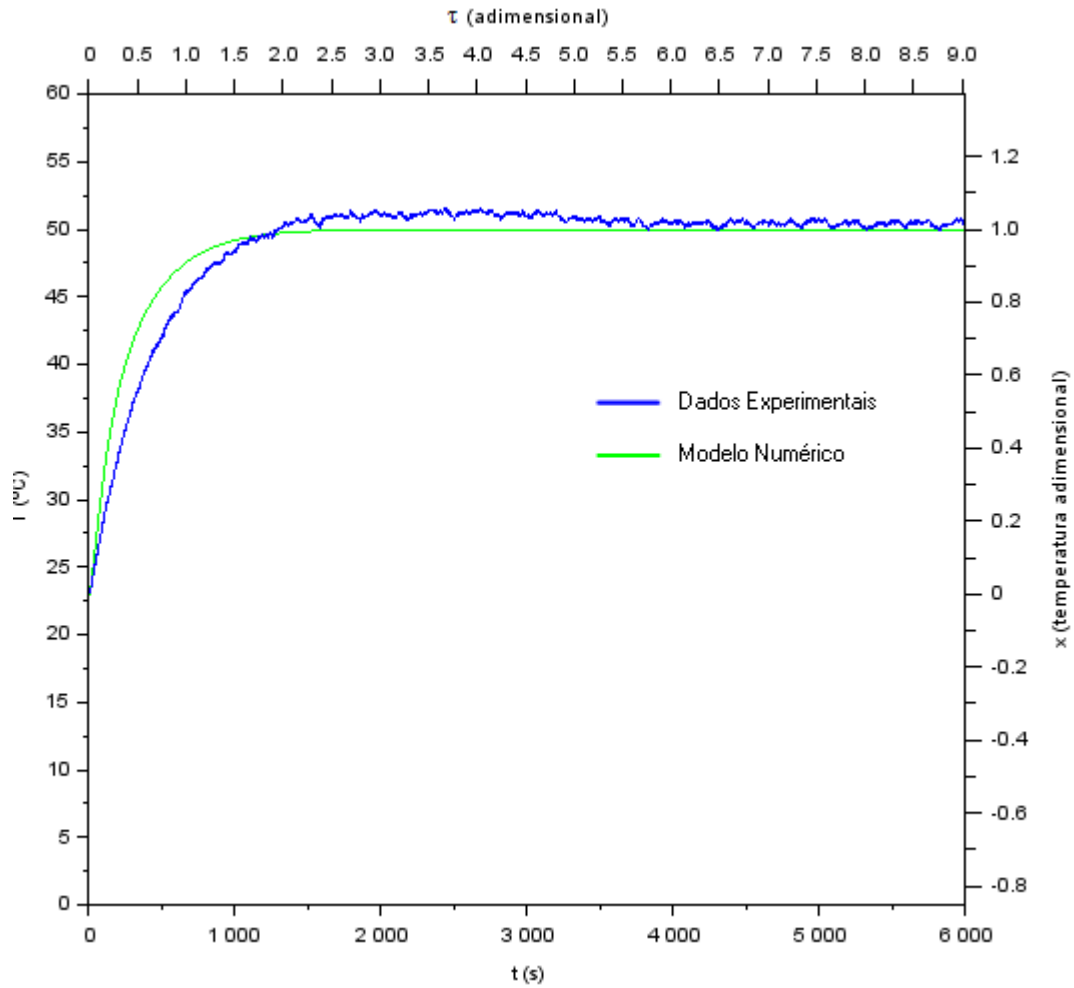


Figura 17. Comparação entre o Modelo Numérico e os Dados Experimentais para uma temperatura de referência 50 $^{\circ}\text{C}$.

A adimensionalização do gráfico da figura 18 foi realizada com respeito a referência 50 $^{\circ}\text{C}$ e considerada a temperatura ambiente constante e igual a 23 $^{\circ}\text{C}$, próxima a temperatura média observada durante o ensaio.

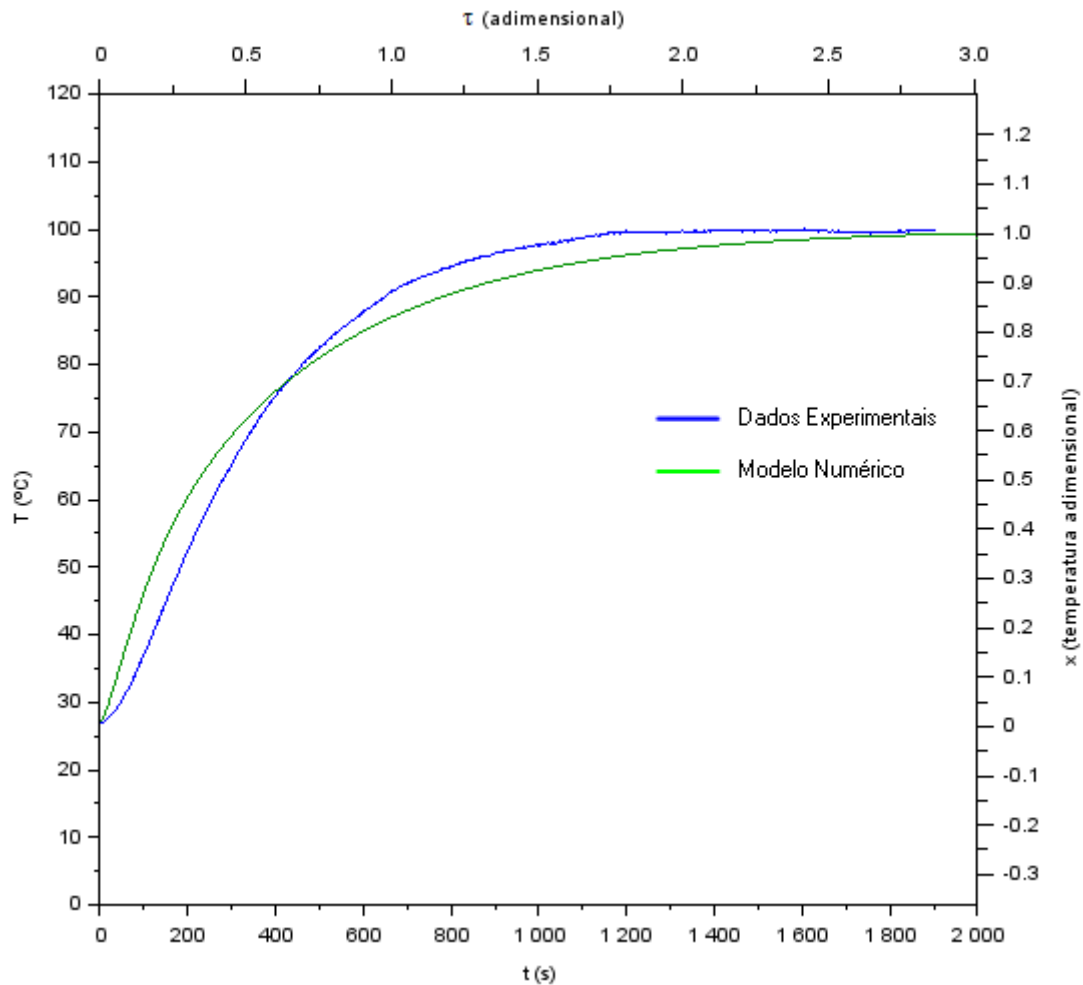


Figura 18. Comparação entre o Modelo Numérico e os Dados Experimentais para uma temperatura de referência 100 °C.

É possível observar uma resposta um pouco mais rápida do sistema de controle do modelo numérico em relação ao tempo de convergência e resposta dos dados tomados experimentalmente. O modelo numérico apresenta um rápido crescimento a partir do tempo inicial zero, que se deve ao fato da modelagem considerar como hipótese que toda energia dada ao resistor elétrico é transferida instantaneamente ao bloco de alumínio da bancada, e ainda, que esse bloco tem o comportamento aproximado pelo modelo de parâmetros concentrados.

Esse comportamento não pode ser esperado para os dados experimentais tomados na bancada, pois a energia dada ao resistor não é transferida instantaneamente ao bloco, havendo um período transiente em que a resistência é usada para aquecer a ela mesma. Também são fatores não contabilizados no modelo matemático as dinâmicas dos instrumentos de leitura. Adicionalmente, não se pode esperar que o bloco apresente o comportamento do modelo de parâmetros concentrados para observações em escalas de tempo pequenas, como a observação da janela de tempo logo após o tempo inicial.

Outros fatores que mostraram certa influência nos dados experimentais observados foram: a histerese do módulo de potência proporcional, utilizado para prover a carga proporcional ao sinal de controle; as variações climáticas do laboratório durante o ensaio; as perdas pela base do bloco de alumínio não contabilizadas no modelo matemático; e a hipótese de linearização da correlação de convecção em torno da temperatura de referência.

6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho trata do controle da temperatura da base de uma aleta cilíndrica. A formulação do problema físico é apresentada e consiste em duas equações diferenciais ordinárias e um sistema de equações diferenciais parciais. As equações diferenciais parciais são resolvidas pelo Método das Linhas, e seu critério de estabilidade foi verificado para o uso do algoritmo de integração de Runge-Kutta de quarta ordem. A implementação computacional utilizou o algoritmo adaptativo de Dormand-Prince, uma variante do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Uma abordagem de controle moderno ótimo é aplicada neste trabalho, com uma formulação do problema de controle em termos de variáveis de estado. A lei de controle é aplicada na simulação numérica resultando em um comportamento estável, no qual o controle do sobressinal e o tempo de convergência puderam ser apropriadamente ajustados pela matriz \mathbf{Q} e pelo parâmetro \mathbf{R} , referentes ao custo do erro e da energia na função objetivo do problema de controle ótimo, respectivamente.

O sistema de controle é implementado em Matlab[®]. A escolha desse programa para implementação experimental se deve ao fato de ser compatível com o sistema de aquisição de dados da National Instruments[™], utilizado na bancada. A mesma lei de controle aplicada no modelo numérico é usada na bancada experimental. Também na implementação em bancada, o controle resultou em um comportamento estável, tendo uma coincidência aceitável com os resultados numéricos. São levantadas hipóteses para justificar pequenos afastamentos entre os resultados numérico e experimental.

Três sugestões para trabalhos futuros sobre essa mesma bancada experimental são propostas:

(i) a implementação de um controle avançado, que pudesse prever e mitigar o efeito de distúrbios no sistema térmico;

(ii) avaliação detalhada da dinâmica dos instrumentos e da histerese do módulo de potência proporcional; e

(iii) o aprimoramento das hipóteses usadas para lidar com as não-linearidades da correlação proposta para o fenômeno de convecção.

REFERÊNCIAS

ATHANS, M., 1971. "The role and use of the stochastic linear-quadratic-Gaussian problem in control system design". *Transactions on Automatic Control, IEEE*, Vol 16, tomo 6, p. 529-552.

AYERS, G. H., 2003. Cylindrical Thermal Contact Conductance, M.Sc. Thesis, Texas A&M University, Texas.

BARBOSA, P. B., BERMEIO VARON, L. A., ORLANDE, H. R. B., 2013. "Design of a Thermal Control System for Extended Surfaces". *Proceedings of the International Congress of Mechanical Engineering, COBEM, ABCM*, vol. 22, p. 1911-1919.

BLACKBURN, A. M., BANN, J.R., BROMLEY, A.H., 1987. "Controls for Electrical Heating Elements of Water Heaters". United Kingdom Intellectual Property Office, GB2185161. <<http://www.ipo.gov.uk/p-ipsu/Case/PublicationNumber/GB2185161>>, acessado em 14 de Janeiro de 2015.

BRYSON Jr., A. E., HO, Y. C., 1975. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*. John Wiley and Sons, New York, edição revisada.

DORMAND, J. R.; PRINCE, P. J., 1980. "A family of embedded Runge-Kutta formulae", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 6, tomo 1, p. 19–26.

GORDON, N. J.; SALMOND, D. J., SMITH, A. F. M., 1993. "Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation". *IEEE Proceedings F on Radar and Signal Processing*, Vol. 140, tomo 2, p. 107–113.

HESPANHA, J. P., 2007. "Undergraduate Lecture Notes on LQG/LQR Controller Design", University of California Santa Barbara, Abril de 2007. <<http://www.ece.ucsb.edu/~hespanha/ece147c-me106a/web/lqrlqgnotes.pdf>>, acessado em maio de 2013.

HESPANHA, J. P., 2009, *Linear systems theory*. Princeton University press, New

Jersey, 1ª edição.

HESPANHA, J. P., 2014. “Topics in Undergraduate Control Systems Design”, University of California Santa Barbara, Março de 2014 <www.ece.ucsb.edu/~hespanha/published/allugtopics.pdf>, acessado em 14 de Janeiro de 2015.

JOSEPH, P.D., TOU, J.T., 1961. “On linear control theory”. *AIEE Trans. Applications and Industry*, Vol. 80, p. 193-196.

KALMAN, R. E., 1960a. “Contributions to the Theory of Optimal Control”. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, Vol.. 5, p. 102-119.

KALMAN, R. E., 1960b. “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”. *Trans. ASME J. Basic Engineering*, Vol. 82, p. 34-45.

KARVOUNIS E., BREWBAKER T., ROETTGER D., VIGILD C., TUMELAIRE C., 2008. “Method for estimation of temperature in intake manifold of internal combustion engine, involves determining estimated value for temperature in intake manifold of internal combustion engine by kalman filter” German Patent and Trade Mark Office, DE102006042874. <<https://depatisnet.dpma.de/DepatisNet/depatisnet?action=pdf&docid=DE102006042874A1>>, acessado em 14 de Janeiro de 2015.

LAX, P. D., RICHTMYER, R. D., 1956. “Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations”. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 9, p. 267-293.

LUENBERGER, D. G., 1964. “Observing the state of a linear system”. *IEEE Trans. on Military Electronics*, Vol. MIL-8, p.74-80.

LUENBERGER, D. G., 1979. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1ª edição.

LYAPUNOV, A. M., 1892. The General Problem of the Stability of Motion , DSc Thesis, Univ. Kharkov, Russia.

McADAMS, W. H., 1954. *Heat transmission*. McGraw-Hill, New York, 3ª edição.

NATIONAL INSTRUMENTS, 2013. "Specifications for the National Instruments CompactDAQ 9188". <<http://www.ni.com/pdf/manuals/370086a.pdf>>, acessado em 05 de Fevereiro de 2015.

OGATA, K., 2003. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 4ª edição.

ÖZİŞİK , M. N., 1985. *Heat Transfer: a basic approach*. McGraw-Hill, New York.

POTTER, J. E., 1964. "A guidance-navigation separation theorem". *Rep. Re-11, Experm. Astronomy Lab.*, MIT, Cambridge.

PRENTICE, J. S. C., 2011. "Stepsize Selection in Explicit Runge-Kutta Methods for Moderately Stiff Problems". *Applied Mathematics*. Vol. 2, p. 711-717.

REDDY, S. C., TREFETHEN, L. N., 1992. "Stability of the method of lines. *Numerische Mathematik*. Vol. 62, n. 1, p. 235-267.

RICHTMYER, R.D., MORTON, K.W., 1967. *Difference Methods for Initial Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, 2ª edição.

SAMRELLO, 2010. "Relé de Estado Sólido Proporcional Série SSRP-25AR 45AR" <<http://www.samrello.com.br/modulos/arquivo.php?file=../binario/1055/SSRP-25-40AR.pdf>>, acessado em 05 de Fevereiro de 2015.

SIEMENS, W., 1871. "On the Increase of Electrical Resistance in Conductors with Rise of Temperature, and Its Application to the Measure of Ordinary and Furnace Temperatures; Also on a Simple Method of Measuring Electrical Resistances". *Proceedings of the Royal Society of London*. Vol. 19, p. 443-445.

STRIKWERDA, J. C., 2004. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 2004, 2ª edição.

TAYLOR, E. H., 1948. "Thermally Controlled Electric Switches". United Kingdom Intellectual Property Office, GB600055. <<http://worldwide.espacenet.com/publicationDetails/biblio?CC=GB&NR=600055>>, acessado em 14 de Janeiro de 2015.

THOMAS, J. W., 1998. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Springer-Verlag, New York, 2ª edição.

TOULOUKIAN, Y. S., HO, C. Y., 1972. "Thermophysical Properties of Matter". Plenum Press, New York, Vol. 1-13.

ANEXO 1 – COMANDOS DE MATLAB PARA CÁLCULO DA DINÂMICA DO SISTEMA, DOS GANHOS DO REGULADOR E OBSERVADOR, E DA SOLUÇÃO EM REGIME PERMANENTE

```
%function [A,B,C,D,L,K,N,x0] = main_sim(Tin)
clc;
clear all

Tin = input('Digite a temperatura de referência desejada. ');
iter = input('Digite a quantidade de iterações. ');
d=daq.getDevices;
s = daq.createSession('ni');
s.addAnalogInputChannel('cDAQ9188-1683B01Mod8',[0 6],'Thermocouple');
s.addAnalogOutputChannel('cDAQ9188-1683B01Mod7',0,'Voltage');
s.Channels(1,1).ThermocoupleType = 'J';
s.Channels(1,2).ThermocoupleType = 'T';
s.Channels(1,1).ADCTimingMode = 'HighSpeed';
s.Channels(1,2).ADCTimingMode = 'HighSpeed';
s.queueOutputData(0);
Ctrl(1)=0;
Ctrlp(1)=0;
OutAd(1)=0;
Ent(1)=0;
data = s.startForeground();
Out=data(1);
Out_tot(1)=Out;

%//Dimensões V[m^3], A[m^2], L[m], P[m]//
La=0.150; %//comprimento livre da aleta
Pa=pi*0.0095;% //perímetro da aleta
Aa=(pi*0.0095^2)/4; %//seção reta da aleta
Ac=0.08*Pa;% // superfície de contato bloco-aleta
Vbloco=(.02*.038*.085)-(2*.085*pi*.005^2);% //bloco
Abloco=2*(.085*.02+.085*.038+.02*.038)-(4*pi*.005^2);%//superfície em
convecção livre do bloco
Vg=.06*pi*.00475^2; %//resistência
Vb=.08*pi*.00475^2;% //base aleta

%//Parâmetros//
k=110; %//coeficiente de condução do latão [W/m.K]
rho=8530; %//massa específica latão [Kg/m^3]
c=380; %//calor específico latão [J/kg.K]
a=k/(rho*c);%//difusividade térmica latão, ?[m^2/s]
rhoal=2700; %//massa específica alumínio [Kg/m^3]
cal=962.9; %//calor específico alumínio [J/kg.K]
hc=10^3; %//coeficiente de contato [W/K.m^2]
n2=72; %//n^2 = hP/kA [m^-2] dado experimental anexo [3]
h=n2*k*Aa/Pa; %//coeficiente de transcal da aleta [W/K.m^2]

%//Temperatura a ser atingida [input]//
Tref=273.15+Tin;

%//Temperatura ambiente, MEDIDA [input]//
Tinf=273.15+data(2);

%//Malha [input]//
```

```

//nos=input("especificar o número de nós na aleta: ")
nos=51;
dx=La/(nos-1); //incremento de espaço [m]
dt=2/(a*(n2+(3/dx^2))); //incremento de tempo [s] mínimo da condição
de estabilidade da análise de Fourier

//Parâmetros de erro e custo, R e Q [input]:
//q=input("especificar a maior variação de temperatura
aceitável[°C]:")
q=1;
Q=((Tref-Tinf)/q)^2*diag(ones(1,nos+2));
r=1;
R=((Tref-Tinf)*k/(r*La))^2

//estado inicial X(0) [input]//
x0=zeros(nos+2,1); % //iniciando na temperatura ambiente adimensional,
zero

//GAMMAS adimensionais//
GAMAge=k*La/(Vbloco*cal*rhoal*a);
GAMAb1=(hc*Ac*La^2)/(Vbloco*cal*rhoal*a);
GAMAge=(1.36*Abloco*((Tref-Tinf)^.25)*La^2)/(Vbloco*cal*rhoal*a);
GAMAc=(hc*Ac*La^2)/(Vb*c*rho*a);
GAMAb=(k*Aa*La^2)/(Vb*c*rho*a*dx);
GAMAA=(La^2)/(dx^2);
GAMAN=n2*La^2;
GAMAIN=2*h*dx/k;

//Matrizes A, B, C e D
A=zeros(nos+2,nos+2); //alocando memória para matriz A(NxN)
A(1,:)=[-GAMAb1-GAMAge GAMAb1 zeros(1,nos)];
A(2,:)=[GAMAc -GAMAc-GAMAb GAMAb zeros(1,nos-1)];
for j=3:nos+1,
    A(j,:)=[zeros(1,j-2) GAMAA (-2*GAMAA)-GAMAN GAMAA zeros(1,nos+1-
j)];
end
A(nos+2,:)=[zeros(1,nos) 2*GAMAA -(2*GAMAA+GAMAIN+GAMAN)];
B=[GAMAge; zeros(nos+1,1)];
C=[0 1 zeros(1,nos)];
D=0;

//Cálculo da Matriz de Ganho K para (A-BK)
//comando de Scilab//P=riccati(A,B*inv(R)*B',Q,'c');//resolve P para
A'*P+P*A-P*B*inv(R)*B'*P+Q=0
K=lqr(A,B,Q,R);
//comando de Scilab//K=inv(R)*B'*P;//calculo de K em função de P
Avalr=eig(A-B*K); //avalia os autovalores do regulador (A-B*K)

//Cálculo da Matriz de Ganho L para (A-LC) pelo sistema dual (A'-C'K)
kd=place(A',C',conj(Avalr));
//comando de Scilab//kd=ppol(A',C',conj(Avalr));
L=kd';
Avale=eig(A-L*C);

//Solução regime permanente e ajuste para ref ã-nula
xpup=[A B;C D]\[zeros(nos+2,1);1];
F=xpup(1:nos+2);
N=xpup(nos+3);

```

```

ref=1;
time(1)=0;
for i=1:iter
    tic
    [t,x,y1,y2,y3] = sim ('control_exp',[0 0.1]);
    Ctrl(i+1)=y1(end);
    Ctrlp(i+1)=y2(end);
    OutAd(i+1)=y3(end);
    s.queueOutputData(y1(end));
    data_prox = s.startForeground();
    Out=data_prox(1);
    Out_tot(i+1)=Out;
    disp(y3(end));
    disp(Out);
    disp(i);
    data=data_prox;
    time(i+1)=toc;
end
time=toc;
s.queueOutputData(0);
data = s.startForeground();
s.stop();

```

ANEXO 2 – COMANDOS DO MATLAB PARA TESTES DE L-ESTABILIDADE, CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

%Matriz de controlabilidade

```
ctrl=[B];
for j=1:nos+1,
    ctrl=[ctrl (A^j)*B];
end

%teste1: verificar se posto da controlabilidade igual a n
%if rank(ctrl)==(nos+2) then 'pelo critério 1 de controlabilidade
%completa o par A,B proposto é controlavel'
%else 'sem controlabilidade, teste 1'
%end %ERRO, matriz ctrl com números muito grandes (inf)

%teste 0: região de estabilidade de RK4, /S/ < 1
S=zeros(Avalr);
s=zeros(Avalr);
for i=1:nos+2
    S(i)=poly(-2+ x*Avalr(i)+ x^2 *(1/2)*Avalr(i).^2+ x^3
*(1/6)*Avalr(i).^3+ x^4 *(1/24)*Avalr(i).^4);
    s(i)=max(real(roots(S(i))));
end
min(s)

%Matriz diagonal: Diag = W'A W
[Diag, W]=bdiag(A);

%teste2, verificar se todos os elementos de W'B são não nulos
teste2=W'*B;
if teste2==0 then 'sem controlabilidade, teste2'
else 'pelo critério 2 de controlabilidade completa o par A,B proposto
é controlável'
end

%Matriz de controlabilidade de saída
ctrls=[C*B];
for j=1:nos+1,
    ctrls=[ctrls C*(A^j)*B];
end
ctrls=[ctrls D];

%teste3: verificar posto da controlabilidade de saída
if rank(ctrls)==1 then 'há controlabilidade de saída'
else 'não há controlabilidade de saída'
end

%Matriz de observabilidade
observ=[conj(C)];
for j=1:nos+1,
    observ=[observ (conj(A)^j)*conj(C)];
end
```

```
%teste4: verificar se posto da observabilidade é igual a n
if rank(observ)==(nos+2) then 'o par A,B proposto tem observabilidade
completa'
else 'o par A,B proposto não tem observabilidade completa'
end
```

ANEXO 3 – RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA (RELATÓRIO APRESENTADO NA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE ENGENHARIA MECÂNICA II)

**ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE
PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA**



Escola Politécnica da UFRJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Laboratório de Engenharia Mecânica II

ALETAS

Professor: Hélcio Rangel Barreto Orlande
Grupo: G5
Alunos: Pablo Borges Barbosa

Rio de Janeiro
junho de 2011

ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA

Resumo;

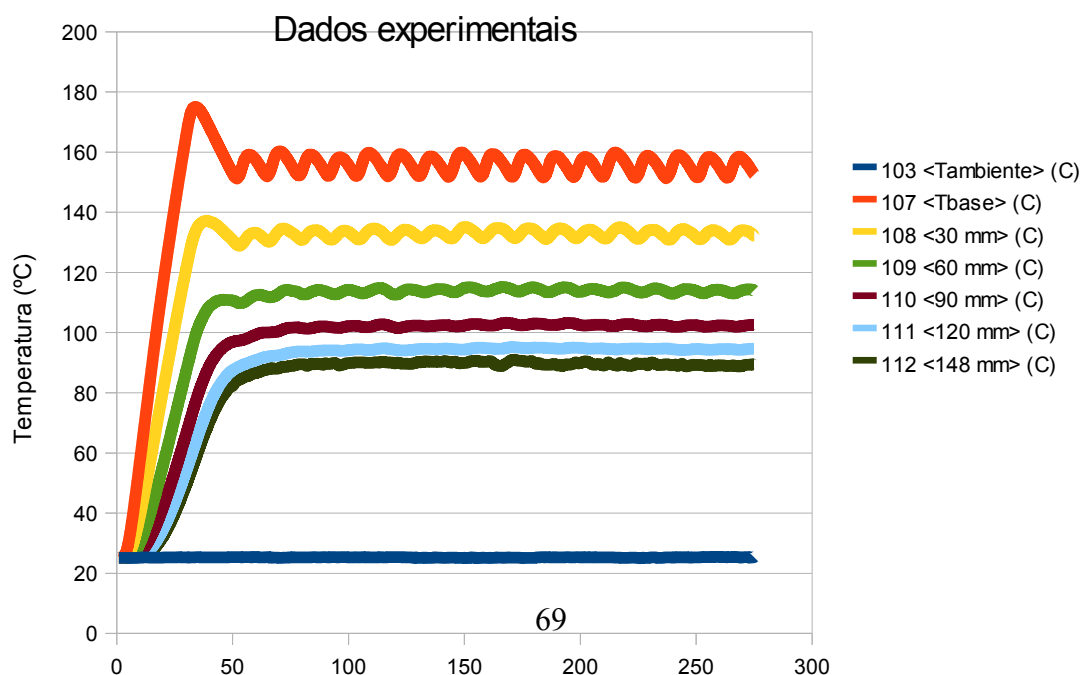
O objetivo do experimento foi estudar a temperatura ao longo de uma aleta aquecida na base e resfriada por convecção natural. O aparato experimental usado foi uma aleta cilíndrica de latão monitorada por 6 termopares e aquecida na base por uma resistência ligada a um sistema de controle on-off. A modelagem teórica foi feita admitindo duas diferentes hipóteses, supondo aleta infinita e aleta finita (com extremidade isolada). Foi observado a compatibilidade dos dois modelos com os dados experimentais, e calculada a eficiência da aleta.

Experimento;

O experimento consta de uma aleta, uma resistência elétrica, termopares para monitoramento da temperatura ao longo da aleta, e um sistema de aquisição de dados.

A aleta utilizada é constituída de uma barra cilíndrica de latão, com 9.5mm de diâmetro e 150mm de comprimento. Termopares do tipo J foram posicionados ao longo da aleta, da base a extremidade, distando 30mm. Um termopar do tipo T faz a medição da temperatura ambiente.

Através da resistência elétrica instalada na base da aleta é dado um aporte térmico ao sistema. Os dados de temperatura são obtidos através dos seis termopares distribuídos ao longo da aleta. Inicialmente a temperatura em todos os pontos da aleta é igual a temperatura ambiente. As tomadas de temperatura são feitas com a frequência de 0,1 hz ($T = 10s$). Após a centésima tomada de temperatura, ou seja, passados cerca de 16 minutos, a base atingiu determinada temperatura que desarmou a resistência elétrica. A resistência é ligada novamente ao atingir um limite inferior de temperatura, e continuará ligando e desligando, fazendo com que os dados de temperatura da base apresentem uma variação com periodicidade em torno de um ponto. Para calcular h/k e a eficiência evitamos os transientes do início do experimento, e tomamos as médias no tempo dos dados de temperatura, forçando assim a hipótese de regime permanente.



ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA

Aleta Infinita;

O modelo de aleta infinita parte da solução da equação diferencial:

$$\ddot{\Theta}(x) - n^2\Theta(x) = 0 \quad \text{Sendo } \Theta = T(x) - T_\infty \text{ e } n^2 = \bar{h}P/kA$$

(\bar{h} a taxa de transferência de calor, P perímetro,

k a condutividade térmica, e A a área da seção)

Tomamos a solução do tipo exponencial para a equação diferencial, assim obtemos:

$$\Theta(x) = \Theta_b \cdot e^{-nx} \quad \text{Sendo } \Theta_b \text{ a temperatura de base da aleta.}$$

A solução $\Theta(x)$ pode ser linearizada pela equação:

$$\ln(\Theta / \Theta_b) = -nx$$

As incertezas experimentais do tipo A (estatísticas), associadas a repetitividade, não serão levadas em conta em face ao enorme número de tomadas que minimizam essa incerteza. Tomaremos apenas incertezas do tipo B (não estatísticas), ou seja, a precisão dos instrumentos de medida, os termopares do tipo T e J. O cálculo se dá através da equação de propagação de incerteza:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots$$

ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA

Para $\Theta(x)$ ($= T_x - T_\infty$), a incerteza fica:

$$\sigma\Theta = (\sigma T_x^2 + \sigma T_\infty^2)^{1/2} = (2 \times 2.2^2)^{1/2} = 3.1^\circ\text{C} \text{ (ou } 3.1 \text{ K)}$$

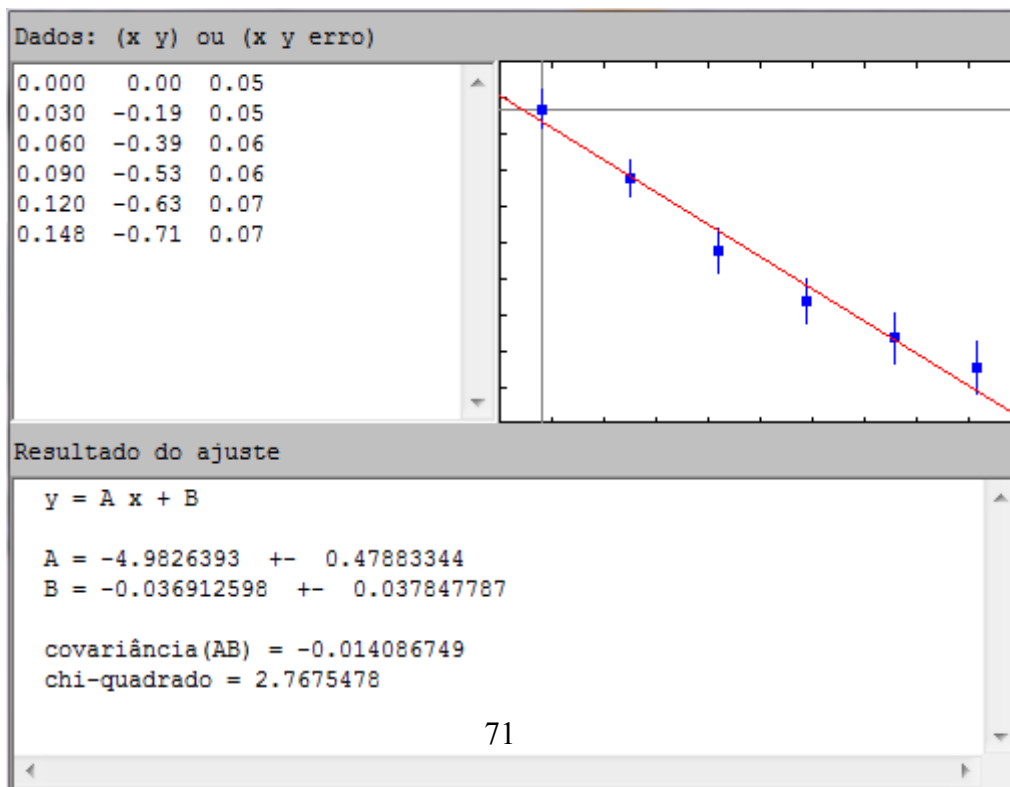
e a incerteza para $\ln(\Theta(x)/\Theta_b)$ será:

$$\sigma(\ln \Theta(x)/\Theta_b) = (\Theta(x) \cdot \sigma\Theta_b + \Theta_b \cdot \sigma\Theta(x)) / \Theta_b^2 / (\Theta(x)/\Theta_b)$$

A tabela a seguir representa a incerteza dos dados experimentais:

x [mm]	$\Theta(x)$ {experimental}	erro de $\Theta(x)$	$\ln(\Theta/\Theta_b)$	erro de $\ln(\Theta/\Theta_b)$
0	130,54	3,1	0	0,05
30	107,78	3,1	-0,19	0,05
60	88,82	3,1	-0,39	0,06
90	77,19	3,1	-0,53	0,06
120	69,37	3,1	-0,63	0,07
148	64,46	3,1	-0,71	0,07

Realizando o ajuste linear de $\ln(\Theta_x/\Theta_b)$ vs (x) temos:



ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA

Pelo coeficiente angular da reta $A = -4.982393 \pm 0.47883344$ temos o valor de $n (= 4.982393)$. Para $n^2 = \bar{h}P/kA$, e tendo os valores do perímetro P e da área A , obtemos a relação \bar{h}/k para modelo de aleta infinita:

$$\bar{h}/k_{inf} = n^2 A/P = n^2 \cdot \pi (d/2)^2 / 2\pi (d/2) = 0.058963399 \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

$$\bar{h}/k_{inf} = \mathbf{0.05896 \text{ [m}^{-1}\text{]}}$$

Aleta finita;

Foi visto que o modelo de aleta finita com comprimento corrigido e perda desprezível na extremidade (isolada) é dado pela equação:

$$\Theta(x)/\Theta_b = \cosh [n(Lc-x)] / \cosh [nLc] \quad \{\text{modelo de aleta finita}\}$$

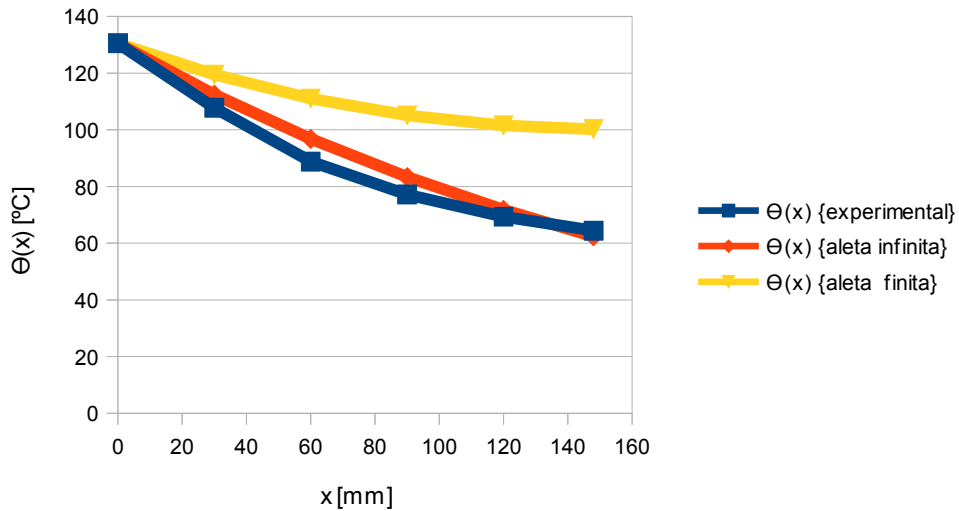
Onde Lc é o comprimento corrigido para aleta cilíndrica ($Lc = L + r/2$). O comprimento corrigido vem diminuir o erro que se comete ao usar um modelo de extremidade isolada quando o aparato experimental troca calor pela extremidade.

Utilizando o valor de n_{inf} que foi obtido no modelo de aleta infinita calculamos o $\Theta(x)$ do modelo de aleta finita.

x [mm]	$\Theta(x)$ {experimental}	$\Theta(x)$ {aleta infinita}	$\Theta(x)$ {aleta finita}
0	130.54	130.54	130.54
30	107.78	112.41	119.45
60	88.82	96.8	111.04
90	77.19	83.36	105.11
120	69.37	71.79	101.54
148	64.46	62.44	100.26

Comparando os resultados experimental, modelo da aleta infinita e modelo da aleta finita graficamente temos:

ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA



Nesse resultado, comparando o modelo aleta infinita com o modelo aleta finita vemos que o primeiro se aproxima mais do resultado experimental. Porém estamos utilizando o valor de n_{inf} achado na linearização do modelo de aleta infinita, logo devemos corrigir esse resultado com o cálculo numérico de n_{fin} para o modelo de aleta finita através de método de mínimos quadrados.

Calculo de h/k com a solução de aleta finita e os dados experimentais;

Queremos achar o valor de n que minimize a distância entre o θ_{fin} - do modelo de aleta finito - e o θ_{med} - medido experimentalmente. Sendo a função S(n) o valor do ajuste de mínimos quadrados para o θ_{fin} e o θ_{med} :

$$S(n) = \sum_{i=1}^5 [\theta_{fin}(x_i, n) - \theta_{med}(x_i)]^2$$

Para achar o valor de n que minimiza essa função procedemos com a derivação:

$$\frac{dS}{dn} = 0$$

Linearizando $\theta(x_i, n)$ em torno de uma solução conhecida n^k , onde k é o contador de iterações, obtemos a expansão de Taylor:

ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA

$$\theta_{f_{\bar{n}}}(x_i, n) \simeq \theta_{f_{\bar{n}}}(x_i, n^k) + \frac{\partial \theta_{f_{\bar{n}}}(n - n^k)}{\partial n} (n^k)$$

Das equações acima temos o seguinte algoritmo para o calculo de n :

$$n^{k+1} = n^k + \frac{\sum_{n=1}^5 [\theta_{med}(x_i) - \theta_{f_{\bar{n}}}(x_i, n^k)] \cdot \frac{\partial \theta_{f_{\bar{n}}}}{\partial n}}{\sum_{n=1}^5 \left[\frac{\partial \theta_{f_{\bar{n}}}}{\partial n} \right]^2}$$

Esse algoritmo iterativo é conhecido como Método de Newton-Gauss.

Podemos equacionar esse algoritmo utilizando o programa Mathematica, ao fazer isso usaremos um notebook com os seguintes comandos:

Lc = 0.152375

$\theta_b = 130.54$

$\theta_{med} = \{107.77, 88.82, 77.19, 69.36, 64.47\}$

$x = \{0.03, 0.06, 0.09, 0.12, 0.148\}$

FindMinimum[

```
( $\theta_{med}[[1]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[1]])]/Cosh[n*Lc]))^2 +
( $\theta_{med}[[2]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[2]])]/Cosh[n*Lc]))^2 +
( $\theta_{med}[[3]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[3]])]/Cosh[n*Lc]))^2 +
( $\theta_{med}[[4]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[4]])]/Cosh[n*Lc]))^2 +
( $\theta_{med}[[5]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[5]])]/Cosh[n*Lc]))^2,
{n, 4.9826393}, Method→"Newton" ]
```

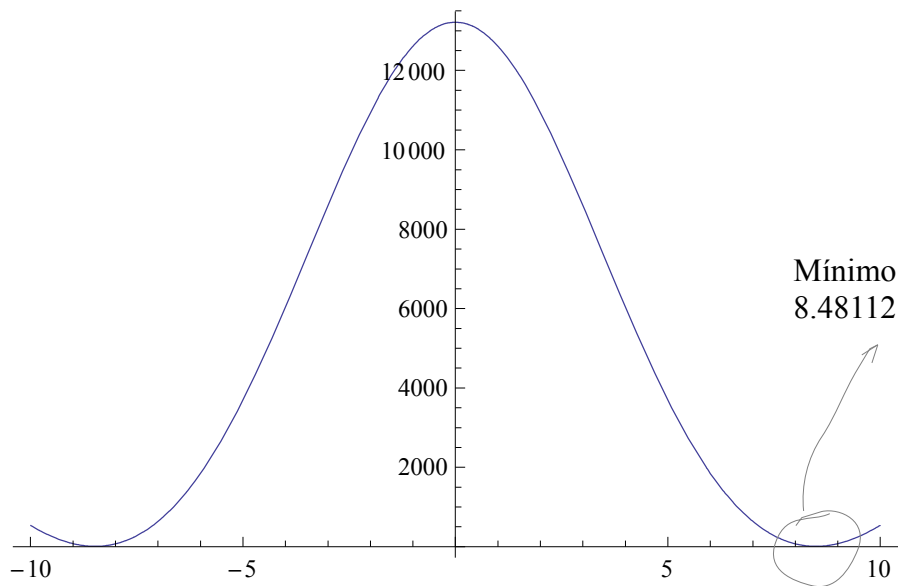
Plot[

```
( $\theta_{med}[[1]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[1]])]/Cosh[n*Lc]))^2 +
( $\theta_{med}[[2]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[2]])]/Cosh[n*Lc]))^2 +
( $\theta_{med}[[3]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[3]])]/Cosh[n*Lc]))^2 +
( $\theta_{med}[[4]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[4]])]/Cosh[n*Lc]))^2 +
( $\theta_{med}[[5]] - \theta_b$  (Cosh[n*(Lc - x[[5]])]/Cosh[n*Lc]))^2, {n, -
10, 10}]
```

ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA

Obtivemos como resultado desse algoritmo o seguinte valor para n mínimo:

{9.80783, {4.98264 → **8.48112**}}



Sendo então $n_{\text{fin}} = 8.48112$, o calculo de h/k é semelhante ao realizado no caso da aleta infinita:

$$\bar{h}/k_{\text{inf}} = n^2 A/P = n^2 d/4 = 0.1708323165792 \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

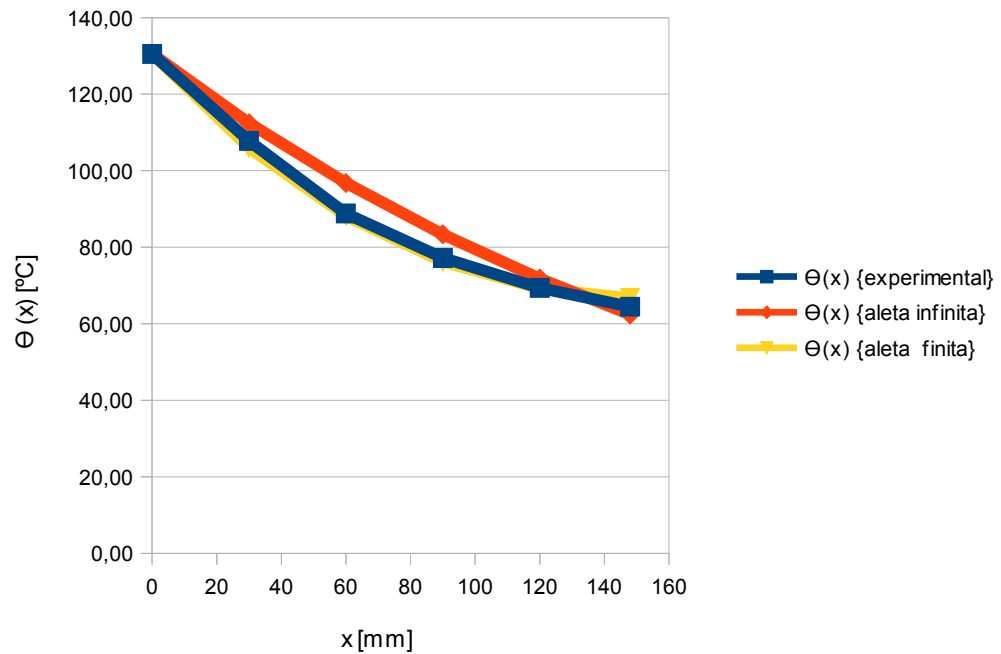
$$\bar{h}/k_{\text{inf}} = 0.1708 \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

Utilizando o valor de corrigido de n_{inf} , obtido para aleta finita, por mínimos quadrados, calculamos novamente o $\Theta(x)$ do modelo de aleta finita, assim podemos comparar os valores de $\Theta(x)$ para os diferentes modelos:

x [mm]	$\Theta(x)$ {experimental}	$\Theta(x)$ {aleta infinita}	$\Theta(x)$ {aleta finita}
0	130.54	130.54	130.54
30	107.78	112.41	105.92
60	88.82	96.80	88.20
90	77.19	83.36	76.22
120	69.37	71.79	69.20
148	64.46	62.44	66.72

ANEXO 3 - RELATÓRIO DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CONVECÇÃO DA ALETA

E conseqüentemente, podemos ver na comparação dos gráficos que o modelo de aleta cilíndrica finita com correção de comprimento para extremidade isolada é mais próximo dos dados experimentais que o modelo de aleta infinita :



Cálculo da eficiência da aleta;

A eficiência da aleta é calculada fazendo-se a razão entre o calor efetivamente

$$\eta_a = \frac{kA n(\Delta T)}{PL n(\Delta T)} \cdot \tanh(nL)$$

transmitido pela aleta sobre o calor que seria transmitido se a aleta inteira estivesse na temperatura da base. A equação é mostrada a seguir:

Utilizando o comprimento corrigido e realizando todas as simplificações possíveis, chegamos ao seguinte resultado:

$$\eta_a = \frac{\tanh[n.Lc]}{n.Lc}$$

Para n calculado na hipótese de **aleta finita** temos $\eta_a = 66.53\%$