Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE DECONVOLUÇÃO EM INTERPRETAÇÃO DE TESTES DE FORMAÇÃO

Hans Lima Spelzon

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Petróleo da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro de Petróleo.

Orientador: Conrado Keidel, M.Sc.
Coorientador: Paulo Couto, D.Sc.

Rio de Janeiro,

Março de 2015

FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE DECONVOLUÇÃO EM INTERPRETAÇÃO DE TESTES DE FORMAÇÃO

Hans Lima Spelzon

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO DE PETRÓLEO.

Examinado por:

_____

Conrado Keidel, M.Sc.

_____

Prof. Paulo Couto, D.Sc.

_____

Prof. Juliana Souza Baioco, D.Sc.

_____

Prof. Virgílio José Martins Ferreira Filho, D. Sc.

Rio de Janeiro,

Março de 2015

Spelzon, Hans Lima

Formulação e Implementação do Algoritmo de Deconvolução em Interpretação de Testes de Formação – Rio de Janeiro: UFRJ / ESCOLA POLITÉCNICA, 2015

xv, 112p.:il.; 29,7 cm.

Orientador: Conrado Keidel

Coorientador: Paulo Couto

Projeto Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia de Petróleo, 2015.

Referências Bibliográficas: p.106-107.

1. Interpretação de Testes de Formação. 2. Deconvolução. 3. Problema Inverso. 4. Total Least Squares. 5. Princípio da Superposição. I. Keidel, Conrado. II. Couto, Paulo. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Escola Politécnica, Curso de Engenharia de Petróleo. IV. Título

"É sempre bom lembrar
Que um copo vazio
Está cheio de ar

É sempre bom lembrar
Que o ar sombrio de um rosto
Está cheio de um ar vazio
Vazio daquilo que no ar do copo
Ocupa um lugar

É sempre bom lembrar
Guardar de cor
Que o ar vazio de um rosto sombrio
Está cheio de dor

É sempre bom lembrar
Que um copo vazio
Está cheio de ar

Que o ar no copo ocupa o lugar do vinho
Que o vinho busca ocupar o lugar da dor
Que a dor ocupa a metade da verdade
A verdadeira natureza interior
Uma metade cheia, uma metade vazia
Uma metade tristeza, uma metade alegria
A magia da verdade inteira, todo poderoso amor
A magia da verdade inteira, todo poderoso amor

É sempre bom lembrar
Que um copo vazio
Está cheio de ar"

Gilberto Gil

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus amigos por terem me apoiado e incentivado durante a realização desse projeto, seja moral, sarcástica ou belicamente. Devo lembrar dos momentos agradáveis, de lucidez, introspecção, descoberta que com eles passei e que me deram paciência e contribuíram para que, hoje, eu pudesse escrever essas palavras.

Álvaro, Sheila, Mariana, Rafael, Diogo, Tati, Mikio, Hélden, Guido, Mariana Duarte, Priscila, Frank, Rôssi, Geórgia, Thales, Ruiz, Daiub, Ana, Bruno, Lucas, Leandro, Tarsila, etc, etc, etc. Certamente não lembraria de todos depois de todo esse tempo. Alguns vieram mais cedo, outros mais tarde. Com eles compartilho minha expressão de satisfação pela finalização de algo.

Também merece minha lembrança meu orientador Conrado Keidel, que tanto me ajudou durante este desafio. Além dele, agradeço ao Bittencourt, que me guiou durante um ano e meio no estágio, Tinoco, Robson, Paula Cristina, Rachid, Ana Paula, Decnop e toda a Avaliação de Reservatórios da Petrobras pelo apoio e o acolhimento. Devo também lembrar o apoio do professor Paulo Couto para a elaboração do projeto.

Por fim, gostaria de agradecer aos que propuseram a fazer um pouco que talvez fosse de grande importância. Nesse grupo entram familiares, amigos, conhecidos que, seja através de um almoço, um empréstimo de livro ou de uma conversa para a qual se disponibilizaram permitiram que eu não tombasse nessa reta final.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Petróleo.

FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE DECONVOLUÇÃO NA INTERPRETAÇÃO DE TESTES DE FORMAÇÃO

Hans Lima Spelzon

Março/2015

Orientador: Conrado Keidel, M.Sc.

Coorientador: Paulo Couto, D. Sc.

Curso: Engenharia de Petróleo

Nas últimas décadas, a interpretação de testes de formação participou de uma série de avanços técnicos que surgiram de uma melhora na aquisição e processamento de dados. Uma das técnicas recentemente desenvolvidas foi um algoritmo robusto e estável de deconvolução. A deconvolução é um procedimento matemático que transforma dados de pressão relacionados a um histórico de vazão variável em um único período de fluxo (*drawdown*) com duração equivalente ao total do teste. Tal procedimento busca encontrar, a partir de um processo de minimização de erro, a forma de derivada que melhor descreve o teste. Assim, torna-se possível analisar e modelar o reservatório de forma mais eficaz. Neste trabalho, busca-se elaborar a formulação do algoritmo de deconvolução numa linguagem mais simples que aquela encontrada em artigos sobre o tema. Com tal objetivo, é feita, posteriormente, uma implementação em Excel, permitindo entender mais extensamente a minimização do

erro total e iniciar um estudo dos pesos que compõem tal processo. Assim, torna-se possível verificar a validade e os limites do algoritmo estudado.

Palavras-chave: Deconvolução, Interpretação de Testes de Formação, Superposição dos Efeitos, Total Least Squares.

Abstract of the Graduation Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Petroleum Engineer.

FORMULATION AND IMPLEMENTATION OF THE DECONVOLUTION ALGORITHM IN WELL TEST INTERPRETATION.

Hans Lima Spelzon

Março/2015

Advisor: Conrado Keidel, M.Sc.

Co-advisor: Paulo Couto, D. Sc.

Course: Petroleum Engineering

In the last decades, well test interpretation has experienced a series of technical advances which emerged from an improvement in data acquisition and processing. One of the recently developed techniques was a robust and stable deconvolution algorithm. Deconvolution is a mathematical procedure that converts variable-rate pressure data into a single drawdown with duration equivalent to the total of the test. This procedure tries to encounter, from an error-minimizing problem, the shape of derivative that best describes the test. Thereafter, it's possible to analyze and model the reservoir more effectively. In this work, the act of formulating the algorithm has the purpose to expose it in a simpler language than the one encountered in articles about this subject. Assuming this intent, it's made an implementation in Excel has been made, allowing us to understand more extensively the error-minimizing problem (Total Least Squares) and to begin a research of the weights that composes it. In this manner, it's possible to verify the validity and the limits for the studied algorithm.

Keywords: Deconvolution, Well Test Interpretation, Superposition effect, Total Least Squares.

Sumário

1 Considerações Gerais 1

1.1 A Engenharia de Avaliação de Formações 1

1.2 Os testes de poços (ou formação) e sua importância 3

1.3 A interpretação de testes e sua evolução 5

1.4 Objetivos e estruturação do trabalho 7

2 Conceitos sobre Teste Transiente 9

2.1 Tipos de Testes Transientes 10

2.2 Os transientes de pressão 14

2.3 Regime Radial Infinito 17

2.4 Estocagem 23

2.5 Dano 25

2.6 Períodos de fluxo e de estática 26

3 Interpretação de testes de pressão 28

3.1 O processo analítico 28

3.2 A interpretação no período pré-deconvolução e atualmente 31

3.3 A Interpretação convencional *versus* a deconvolução 35

4 Conceitos Fundamentais 40

4.1 Diferenciação e Integração de Dados Discretos 40

4.1.1 Diferenciação 40

4.1.2 Integração 43

4.2 Convolução e deconvolução 45

4.3 Método dos mínimos quadrados (MMQ) sem e com regularização 52

4.3.1 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) 52

4.3.2 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) com regularização 58

5 Formulação e Implementação do Problema 60

5.1 Formulação do Problema 60

5.2 Implementação do problema 67

6 Estudos de caso 75

6.1 Resposta de referência 90

6.2 Estudo de $\boldsymbol{\lambda}$ sem atribuir incerteza às medições da pressão estática inicial e da vazão 91

6.3 Estudo de $\boldsymbol{\lambda}$ atribuindo assumindo incerteza em p_0 95

6.4 Estudo de $\boldsymbol{\nu}$ assumindo incerteza na medição da vazão 97

6.5 Estudo de $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\nu}$ assumindo incerteza na medição da vazão e na pressão estática inicial 99

7 Conclusões 104

Bibliografia 106

Apêndice A – Obtenção da matriz A 108

Apêndice B - Cálculo da curvatura 110

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 – Fluxo de dados no projeto de explotação do campo de petróleo 3

Figura 1-2 – Comparação de modelos analíticos e numéricos 5

Figura 2-1 – Arranjo de superfície e parte superior da coluna de teste 9

Figura 2-2 – Coluna básica de um teste de formação convencional (Fonte: THOMAS, 2001) 10

Figura 2-3 – Carta correspondente a um teste real 11

Figura 2-4 – Carta de teste com fluxo variável correspondente a um teste real 12

Figura 2-5 - Teste de interferência 13

Figura 2-6 – Teste de Injeção 14

Figura 2-7 - Fenômeno da superposição aplicado a um teste de formação 15

Figura 2-8 – Esquema de propagação do transiente de pressão com poço próximo a uma falha selante (HOUZÉ *et al*., 2012) 16

Figura 2-9 – Convolução e superposição 17

Figura 2-10 – Gráfico de Diagnóstico 21

Figura 2-11 – Gráfico de diagnóstico apontando as variações na derivada de pressão decorrentes dos regimes de fluxo encontrados 22

Figura 2-12 – Propagação do transiente de pressão no reservatório 23

Figura 2-13 – Diferença entre vazão medida na superfície e vazão fluindo para o poço no fundo (HOUZÉ *et al*., 2012. Tradução do autor) 24

Figura 2-14 – Convenção para utilização do skin em dano ou estimulação (HOUZÉ *et al*., 2012. Tradução do autor) 25

Figura 3-1 – Dados medidos pelo registrador 28

Figura 3-2 – Elaboração de um modelo analítico para descrever os dados medidos .. 29

Figura 3-3 – Esquema do problema Inverso 30

Figura 3-4 - Fluxograma da interpretação de testes da forma convencional 33

Figura 3-5 - Fluxograma da interpretação de testes com a introdução da deconvolução no processo 34
Figura 3-6 – Carta de um teste real 35
Figura 3-7 – Gráfico de diagnóstico com estáticas e modelo adotado 36
Figura 3-8 – Ajuste Global do teste 36
Figura 3-9 – Ajuste Global do teste 37
Figura 3-10 – Resposta deconvolvida e derivadas das estáticas 38
Figura 3-11 – Gráfico de diagnóstico 38
Figura 3-12 – Ajuste global anterior e após a deconvolução 39
Figura 4-1 - Derivada y em relação a x (GRINGARTEN *et al*., 2008. Adaptado) 41
Figura 4-2 – Derivação de dados discretos 43
Figura 4-3 – Problema inverso aplicado aos testes de formação 46
Figura 4-4 – Histórico de vazões no tempo (HOUZÉ *et al*., 2012) 48
Figura 4-5 – Variação de pressão unitária e superposição dos efeitos em testes de formação 50
Figura 4-6 – Ajuste polinomial e erros envolvidos 52
Figura 4-7 – Ajuste polinomial de 2º grau 57
Figura 4-8 – Ajuste polinomial de 3º grau por cálculo matricial e pelo solver 57
Figura 5-1 – Fluxograma do processo de deconvolução 61
Figura 5-2 – Ângulo entre duas retas (GRINGARTEN *et al*., 2004) 66
Figura 5-3 – Cálculo da variação de pressão no problema 68
Figura 5-4 – Gráfico de diagnóstico 69
Figura 5-5 – Ponto de partida adotado para a derivada de pressão unitária 70
Figura 6-1 – Gráfico de diagnóstico da Estática 1 79
Figura 6-2 - Gráfico de diagnóstico da Estática 2 81
Figura 6-3 – Consistência das Estáticas 81
Figura 6-4 – Derivada de pressão unitária no início da implementação 83
Figura 6-5 - Pressão medida e calculada 89

Figura 6-6 – Gráfico de Diagnóstico antes de qualquer iteração 90
Figura 6-7 – Gráfico de diagnóstico 91
Figura 6-8 – Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 1$ 92
Figura 6-9 - Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 10$ 92
Figura 6-10 - Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 0{,}1$ 93
Figura 6-11 - Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 0{,}01$ 94
Figura 6-12 - Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 0{,}001$ 94
Figura 6-13 – Gráfico de diagnóstico para incerteza em $p0$ e $\lambda = 0{,}001$ 95
Figura 6-14 - Gráfico de diagnóstico para incerteza em $p0$ e $\lambda = 0{,}01$ 96
Figura 6-15 - Gráfico de diagnóstico para incerteza em $p0$ e $\lambda = 1$ 96
Figura 6-16 – Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão, $\lambda = 0{,}001$ e $\nu = 0{,}001$ 98
Figura 6-17 - Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão, $\lambda = 0{,}001$ e $\nu = 0{,}01$ 99
Figura 6-18 – Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão e em $p0$ conjuntamente para $\lambda = 0{,}001$ e $\nu = 0{,}1$ 100
Figura 6-19 - Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão e em $p0$ conjuntamente para $\lambda = 0{,}0001$ e $\nu = 100$ 101
Figura 6-20 - Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão e em $p0$ conjuntamente para $\lambda = 0{,}01$ e $\nu = 10$ 102
Figura 6-21 – Pressão calculada e medida para incerteza na medição da vazão e em $p0$ conjuntamente para $\lambda = 0{,}001$ e $\nu = 0{,}1$ 103
Figura B-0-1 - Cálculo da curvatura em dados discretos 110

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1-1 - Sumário da história da interpretação de testes de formação (GRINGARTEN *et al*., 2008, Adaptado.) 6

Tabela 2-1 - Vantagens das estáticas em relação aos fluxos 27

Tabela 4-1 - Diferenciação de dados 42

Tabela 4-2 - Integração de dados discretos 44

Tabela 4-3 – Dados utilizados no exemplo 55

Tabela 6-1 – Dados sintéticos utilizados na implementação do problema 75

Tabela 6-2 - Dados sintéticos utilizados na implementação do problema 76

Tabela 6-3 - Histórico de vazões 77

Tabela 6-4 - Dados da estática 1 78

Tabela 6-5 - Dados da estática 2 80

Tabela 6-6 - Dados discretos da derivada de pressão unitária 82

Tabela 6-7 - Integração de dados discretos 84

Tabela 6-8 – Cálculo dos Transientes 85

Tabela 6-9 – Cálculo da Superposição dos Transientes 85

Tabela 6-10 - Parcela de erro devido à pressão na estática 1 86

Tabela 6-11 - Parcela de erro devido à pressão na estática 2 86

Tabela 6-12 - Cálculo da curvatura 87

1 Considerações Gerais

1.1 A Engenharia de Avaliação de Formações

Denomina-se Avaliação de Formações o conjunto de atividades e os estudos que visam definir em termos qualitativos e quantitativos o potencial de uma jazida petrolífera. Este conjunto se baseia em alguns métodos para obtenção de dados da formação de interesse. Estes seriam a perfilagem a poço aberto, o teste de formação a poço aberto, o teste a poço revestido e a perfilagem de produção (THOMAS, 2001).

A Engenharia de Avaliação de Formações é uma das disciplinas que compõem o projeto de explotação dos campos que são de interesse para a indústria do petróleo. Dentro de tal projeto, existem outras disciplinas provedoras e receptoras de dados que permitem algumas visões, em diferentes escalas, de como se organiza o reservatório sob estudo. As demais disciplinas seriam:

- a Geofísica;
- a Geologia;
- a Engenharia de Reservatórios;
- a Petrofísica.

A Geofísica, principalmente através da Sísmica, e a Petrofísica, principalmente através dos dados de perfis, são grandes áreas fornecedoras de dados estáticos para o projeto.

A Geologia acompanha a etapa de Exploração do campo desde o início, fornecendo informações sobre as amostras de rochas recolhidas, da localização do provável reservatório e das estruturas geológicas mais promissoras para a acumulação de petróleo na área.

A Engenharia de Avaliação de Formações é uma importante provedora de dados dinâmicos, fornecendo parâmetros do reservatório que se deseja conhecer a partir de observações do reservatório em fluxo e em estática.

A Engenharia de Reservatórios assume o papel de reunir os dados das outras grandes áreas e criar um modelo para o reservatório, o qual gerará subsídios para que se possa definir o sistema produtivo, a quantidade, a geometria, a localização dos poços, o tipo de completação, o esquema de produção mais adequado para que se maximize o retorno sobre o investimento na explotação da jazida. Pode-se dizer, então que a Engenharia de Reservatórios seria a responsável por organizar a produção.

Este modelo, portanto, será frequentemente calibrado com os dados estáticos e dinâmicos vindos das disciplinas relacionadas na medida em que são perfurados mais poços e mais informações são recebidas.

Dentro de uma lógica de integração de dados, um fluxo de projeto de explotação está organizado de acordo com uma produtiva troca de informação e contribuição entre essas cinco áreas, em busca de um objetivo global para o campo. Essa lógica se organiza através de uma multidisciplinaridade e uma cooperação que proporciona uma maior eficiência no estudo do reservatório (ver Figura 1-1).

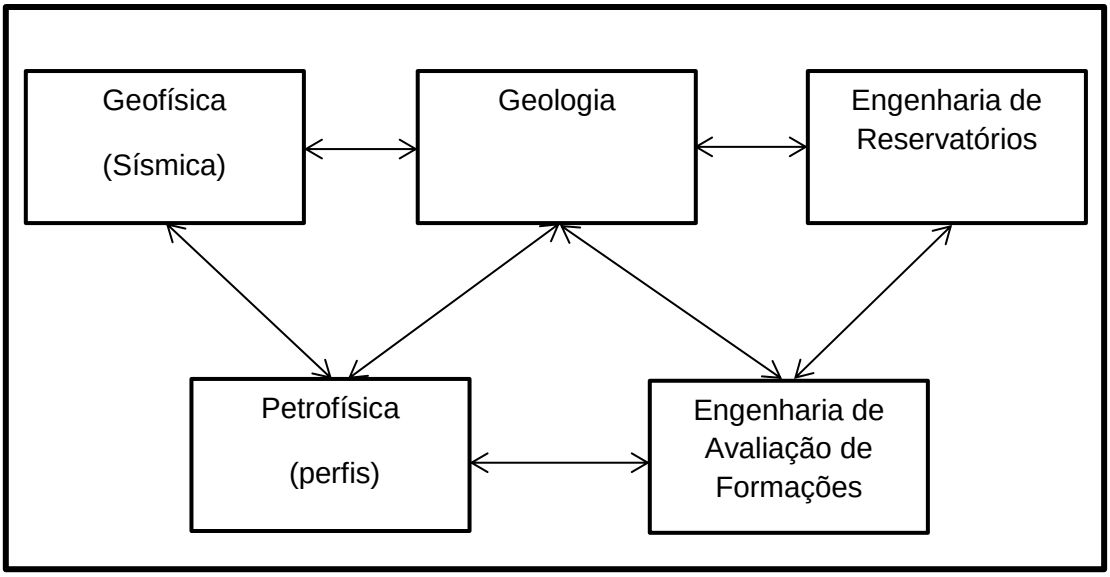

Figura 1-1 – Fluxo de dados no projeto de explotação do campo de petróleo

1.2 Os testes de poços (ou formação) e sua importância

Os testes de poços são executados para que se tenha acesso às condições do poço perfurado e para que sejam obtidos parâmetros dinâmicos do reservatório em estudo. Esses testes são os grandes e, muitas vezes, únicos provedores de dados desta natureza aos projetos de explotação de campos de petróleo, pelo menos em suas fases iniciais. Em fases mais adiantadas, quando já existe um histórico significativo, ainda assumem grande importância para a determinação da área de drenagem associada a cada poço, da conectividade entre eles e de suas condições mecânicas.

De forma geral, pode-se dizer que os testes de poços são operações em que uma determinada quantidade de massa é retirada do sistema ou nele é injetada, ocasionando variações de pressão que são detalhadamente registradas. Em última análise, podem ser vistos como prévias, de menor duração, da produção do reservatório.

Dependendo da organização do reservatório e dos dados em que se tem interesse, podem ser de vários tipos. Deles, geralmente se buscam as seguintes informações:

- qualificação dos fluidos existentes no intervalo poroso através de amostragem e posteriores ensaios em laboratórios;
- determinação da transmissibilidade/capacidade de fluxo/permeabilidade média da formação;
- determinação da natureza e, quando possível, das dimensões e propriedades de heterogeneidades do reservatório, inclusive suas fronteiras ou singularidades internas;
- medição do índice de produtividade ou injetividade do sistema;
- verificação das condições de poço, com quantificação do efeito de película e da razão de dano;
- e verificação de interferência ou conectividade entre poços.

Os testes de poços são mais conhecidos na indústria como testes de formação. O conceito de formação, neste caso, é entendido como equivalente ao de reservatório. Portanto, quando se fala genericamente em testes de formação, estes servem de sinônimos para testes de poços, ou ainda, de pressão.

Por ser a mais difundida, esse trabalho se serve, na maioria das vezes, de tal nomenclatura, apenas indicando alguma especificação para os termos quando são listados os diferentes tipos de testes de poços. Alguns tipos são: teste de formação a poço revestido (TFR), teste de produção (TP), teste de interferência (TI) e teste de injeção de fluidos (TIF). Cada um possui uma estrutura de coluna de teste condizente com sua finalidade.

1.3 A interpretação de testes e sua evolução

A interpretação de um teste de formação consiste na escolha de um modelo matemático que possa relacionar os dados de pressão e vazão registradas durante o teste. Este modelo pode ser obtido analítica ou numericamente e a partir dele deve ser possível enxergar o comportamento do reservatório.

A modelagem analítica tem como vantagem sua rapidez e exatidão. No entanto, para que seja obtida, é necessário que o sistema tenha um comportamento que possa ser ajustado pelos modelos matemáticos simples e de solução conhecida para que, assim, seja possível estimar seus parâmetros. Quando isso não ocorre, pode-se buscar uma visão do comportamento do reservatório diretamente através de modelos numéricos, os quais são mais flexíveis (ver Figura 1-2).

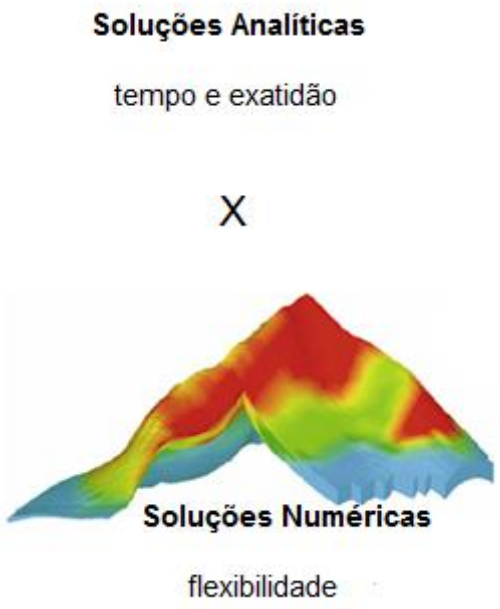

Figura 1-2 – Comparação de modelos analíticos e numéricos

As técnicas de interpretação dos testes de formação evoluíram ao longo da história da Avaliação de Formações, passando por muitos estágios de eficiência (Tabela 1-1).

Com o progressivo incremento nos métodos e equipamentos para a realização dos testes, paralelamente tem sido desenvolvidas novas técnicas de interpretação. Dentro desse contexto, a mais significativa foi o algoritmo de deconvolução, desenvolvido por VON SCHRÖETER *et al.* (2001, 2004).

Tabela 1-1 - Sumário da história da interpretação de testes de formação (GRINGARTEN *et al*., 2008, Adaptado.)

Época	Método utilizado	Ferramenta matemática ou técnica	Ênfase ou objetivo principal
Anos 1950	Análise de linhas retas	Transformada de Laplace	Comportamento de reservatórios homogêneos
Final dos anos 60 e Início dos anos 70	Análise de curvas-Tipo	Funções de Green	Efeitos próximos ao poço
Final dos anos 70	Curvas-tipo com variáveis independentes	Metodologia Integrada e Algoritmo de Stehfest	Comportamento de dupla porosidade
Início dos anos 80	Derivadas	Análise computacional	Comportamento de reservatórios heterogêneos e barreiras
Anos 90		Medições de fundo e e integração com modelos de interpretação de outros de dados	Reservatório com várias camadas
Início dos anos 2000		Deconvolução	Aumento no raio de investigação e na análise das barreiras

O algoritmo da deconvolução é aplicado numa etapa anterior à modelagem propriamente dita. Na prática, pode-se dizer que tal técnica converte dados de pressão correspondentes a vazões variáveis em um único *drawdown* (fluxo) de vazão constante e de duração equivalente à duração total do teste.

Sua grande conquista foi tornar uma maior quantidade de dados medidos disponíveis para a interpretação, além de obter com maior rapidez a identificação do modelo

adequado para o reservatório. Este método também permite que se possa enxergar efeitos de fronteira que antes não eram vistos na análise de cada período individualmente, contribuindo assim para uma maior eficiência na interpretação.

1.4 Objetivos e estruturação do trabalho

Como todo novo desenvolvimento, o algoritmo da deconvolução gerou muita desconfiança e muitas críticas. Porém, posteriormente, com seu aprimoramento, principalmente a partir de 2004, um maior número de estudiosos obteve meios de entender sua formulação e seu uso e de poder defendê-la. Assim, partindo dos conceitos usados na interpretação de testes de formação e da formulação elaborada para o algoritmo da deconvolução divulgada até hoje, esta monografia pretende:

- Apresentar o conteúdo de interesse com uma organização e linguagem mais simples que aquelas apresentadas em artigos sobre o tema;
- Apresentar uma forma consistente de implementação em Excel, já levando em conta os avanços mais recentes;
- Discutir a validez da técnica e seus limites;
- Indicar potenciais desenvolvimentos futuros do uso da ferramenta.

Para atingir esses objetivos, o trabalho se estrutura em 7 capítulos:

- No capítulo 2 são introduzidos alguns conceitos sobre teste transiente com os quais a interpretação de testes lida.
- No capítulo 3 fala-se sobre o que é a interpretação de testes de formação e explica-se a mudança que ocorre com a introdução do algoritmo da deconvolução neste processo.
- No capítulo 4 é feita uma revisão dos conceitos de derivação, integração, convolução, deconvolução e método dos mínimos quadrados em aspecto introdutório e para o caso específico do problema a ser implementado;

- No capítulo 5 é apresentada a formulação do problema da deconvolução e a implementação do problema formulado;
- No capítulo 6 são mostrados estudos de caso feitos no software Excel;
- No capítulo 7 são discutidos resultados e indicadas perspectivas para usos futuros.

2 Conceitos sobre Teste Transiente

Testes transientes são operações em que a pressão varia com tempo diferentemente em diferentes locais do sistema poço-reservatório. Isso acontece, por exemplo, quando um poço é colocado em produção ou injeção ou quando um poço ativo tem um fluxo interrompido.

É o que ocorre, portanto, nos testes de formação, cuja execução se dá da seguinte forma: o sistema é perturbado através da retirada ou injeção de massa, expressa por $q(t)$, e fornece como resposta a variação de pressão correspondente, $p(t)$.

Nos testes convencionais, as vazões são reguladas no *choke manifold* e medidas no vaso separador. As pressões, por outro lado, são medidas por dispositivos eletrônicos posicionados no fundo do poço (registradores). Na coluna de teste também estão presentes válvulas que regulam o fluxo de fluidos no interior do poço, além de packers (obturadores), que isolam o intervalo de interesse do anular. Todos estes componentes podem ser vistos na Figura 2-1 e na Figura 2-2.

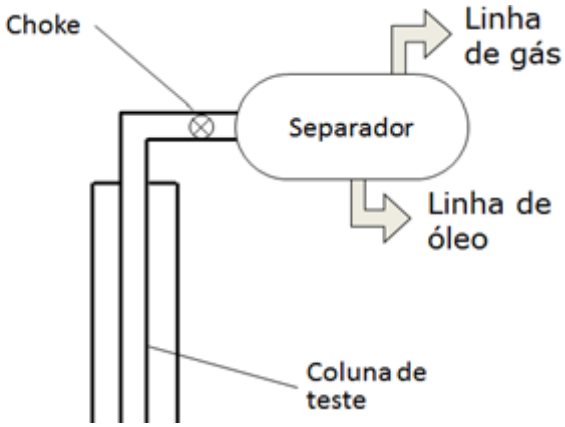

Figura 2-1 – Arranjo de superfície e parte superior da coluna de teste

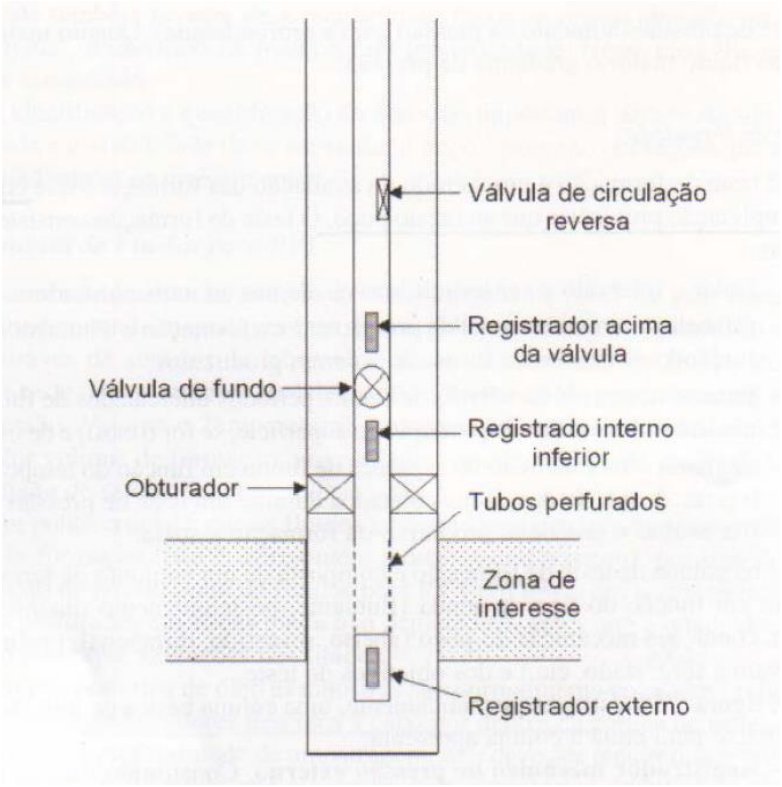

Figura 2-2 – Coluna básica de um teste de formação convencional (Fonte: THOMAS, 2001)

Quanto às medições, registradores normalmente apresentam exatidão de 0,01 psi. As medições de vazão, por outro lado, em função dos métodos e da natureza dos fluidos, podem apresentar erros relativos de até 10%.

2.1 Tipos de Testes Transientes

Um teste de formação, genericamente, é equivalente à uma completação provisória do poço (THOMAS, 2001). Consiste em basicamente:

1) Isolar o intervalo a ser testado;
2) Estabelecer um diferencial de pressão entre a formação e o interior do poço;
3) Promover períodos intercalados de fluxo e estática, medindo as vazões na superfície;

4) Registrar a pressão de fundo durante o tempo do teste.

Um teste de formação a poço revestido (TFR) convencional se caracteriza pelo bom isolamento do intervalo de interesse e pelas boas condições mecânicas do poço. É composto, muitas vezes, de duas estáticas e dois períodos de fluxo, sendo as primeiras geralmente as mais longas (períodos de maior interesse para a interpretação). Além disso, habitualmente, possuem até 72h de fluxo.

Após a instalação dos equipamentos e descida da coluna, quando o poço está aberto (fluxo), há uma queda de pressão (*drawdown*) e quando está fechado (estática), há uma elevação na pressão (*buildup*). Pode-se perceber isso no TFR da Figura 2-3, que possui 4 estáticas. A pressão é dada em kgf/cm^2 (kg/cm^2) e a vazão em m^3/dia. O tempo é dado em horas.

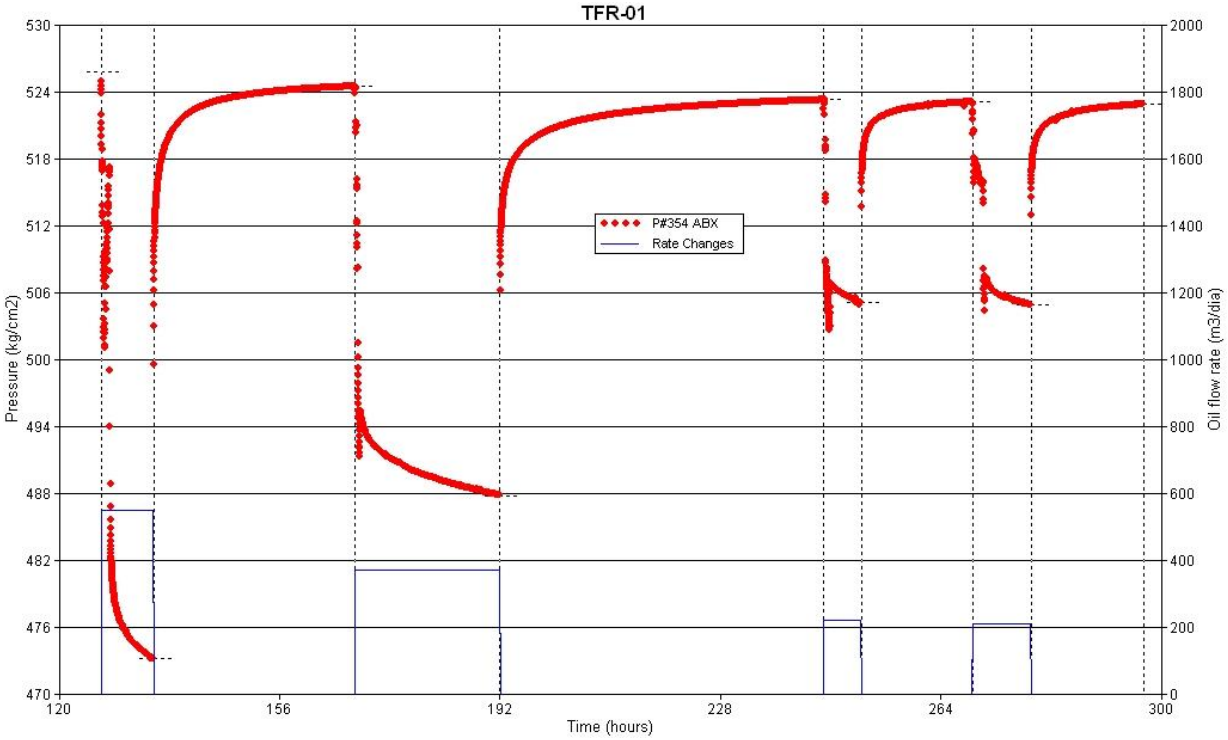

Figura 2-3 – Carta correspondente a um teste real

Outro fator importante de ser mencionado é que a vazão na superfície é, por vezes, de difícil controle. Isso geralmente ocorre em virtude de alguns problemas naturais do fluxo no poço. Essa questão será discutida na seção sobre períodos de fluxo e estática.

A Figura 2-4 mostra a carta para um teste com vazão variável no fluxo.

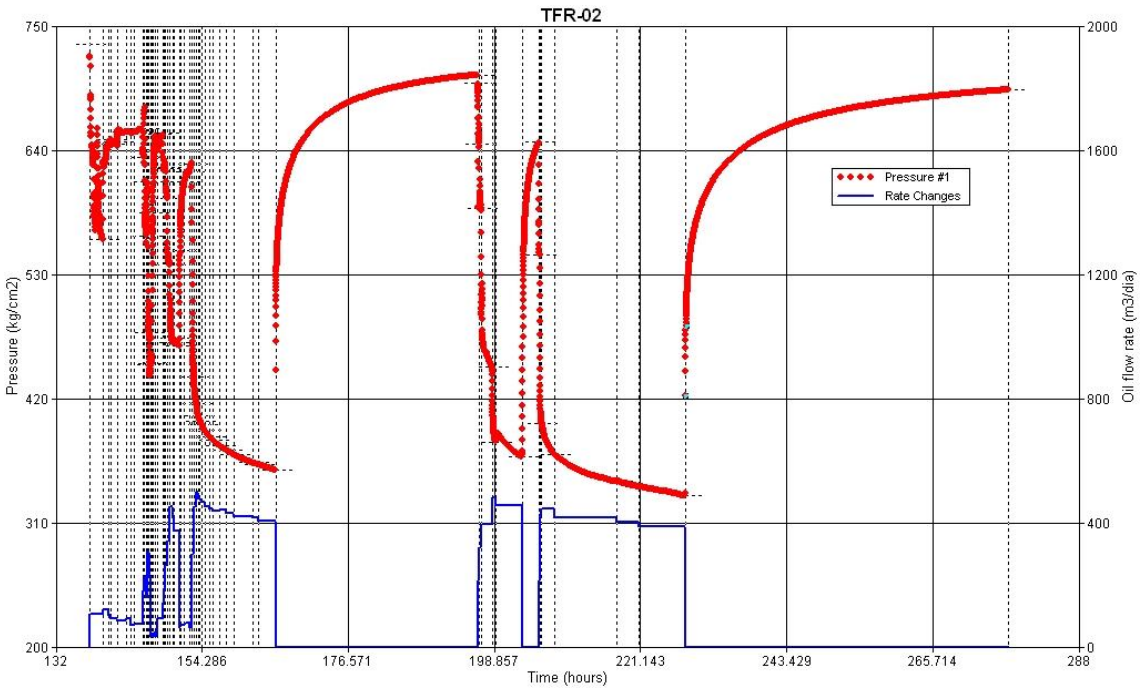

Figura 2-4 – Carta de teste com fluxo variável correspondente a um teste real

Os testes de interferência são feitos para verificar a comunicação entre poços e a continuidade da formação, além de permitir obter a porosidade e a permeabilidade da região entre os poços. Assim, neste tipo de teste, opera-se com um poço em produção e observa-se a variação de pressão nos outros poços (Figura 2-5).

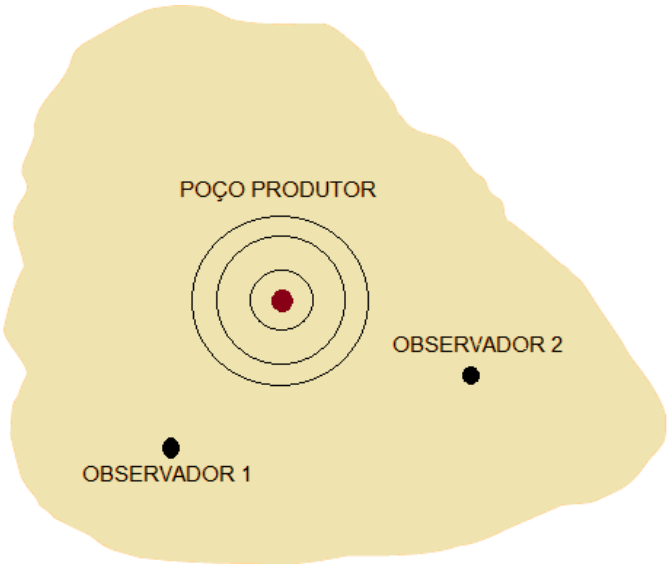

Figura 2-5 - Teste de interferência

O mesmo teste pode ser feito para verificar a comunicação entre zonas dispostas verticalmente. Neste caso, os dois intervalos estão isolados por packers (obturadores) e mede-se a pressão com um registrador na coluna na profundidade da zona ativa e outro na profundidade da zona produtora.

Os testes de injeção (falloff) consistem na medição da queda de pressão que ocorre após a injeção de massa no sistema (Figura 2-6).

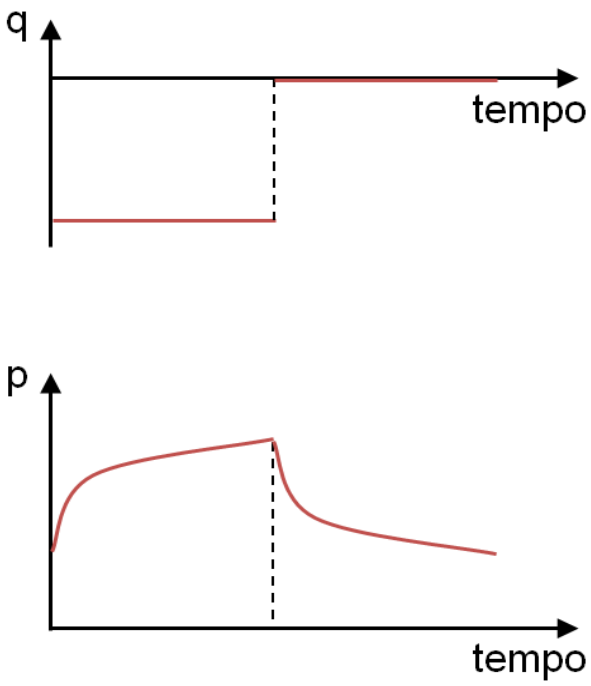

Figura 2-6 – Teste de Injeção

Outros tipos de testes podem ser realizados. No entanto, aqui não nos interessa descrevê-los em sua totalidade, mas ter uma ideia geral das condições a eles impostas e suas respostas.

2.2 Os transientes de pressão

Como visto na carta de teste[1] (Figura 2-3), para a realização do teste de formação, geralmente, são impostos aos reservatórios históricos de vazões variáveis na forma de degraus. Assim, genericamente, dentro do tempo do teste, podem ser separados períodos de fluxo e estática durante cada qual é registrado um diferencial de pressão.

Pode-se dizer que cada alteração de vazão gera uma perturbação adicional que se propaga pelo meio provocando nele alterações de pressão, e consequentemente, de

[1] A carta de teste apresenta conjuntamente dados de vazão e pressão relacionados no tempo de teste.

vazão. Assim, num período comum de fluxo num teste, enquanto o fluido se direciona para o poço, zona de menor pressão, uma resposta de pressão transiente se propaga para regiões cada vez mais distantes dele.

A resposta transiente medida pode ser entendida como a soma dos vários transientes impostos a cada perturbação que ocorre. Esse princípio é conhecido como superposição dos efeitos no tempo e é comum em vários ramos da Engenharia. Também será de especial importância para que se entenda a interpretação de testes.

O fenômeno pode ser visto graficamente. O primeiro gráfico da Figura 2-7 é equivalente à superposição dos efeitos encontrada na carta de teste. A carta do primeiro gráfico é o resultado da soma do *drawdown* do gráfico central com o *buildup* do último gráfico para valores de tempo posteriores ao fechamento do poço.

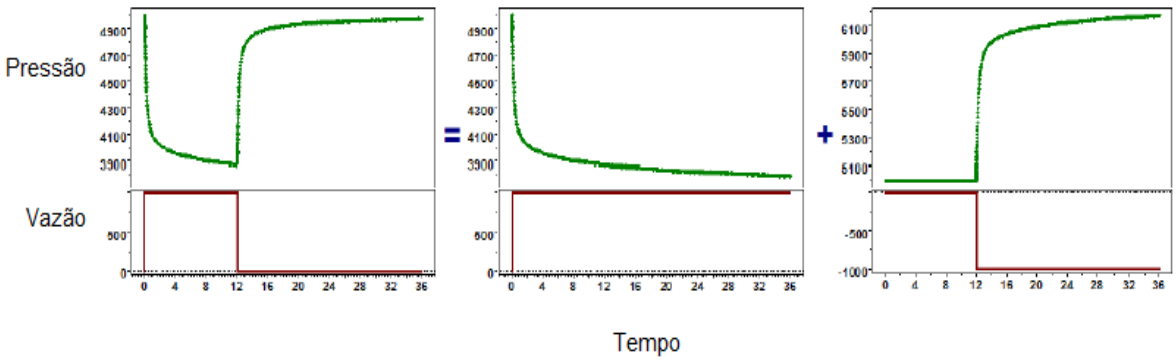

Figura 2-7 - Fenômeno da superposição aplicado a um teste de formação

Além da superposição no tempo, há ainda a superposição especial dos efeitos. No caso de uma falha selante de extensão infinita próxima ao poço, por exemplo, a superposição ocorre como mostrado na Figura 2-8. Ao se propagar, o transiente provoca uma queda de pressão ao redor do poço. Quando encontra a fronteira, passa a ocorrer uma queda adicional de pressão.

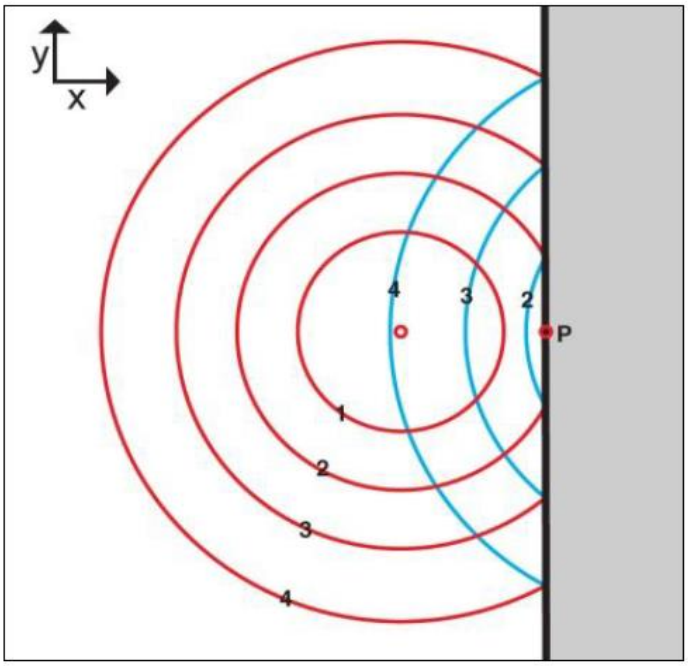

Figura 2-8 – Esquema de propagação do transiente de pressão com poço próximo a uma falha selante (HOUZÉ *et al*., 2012)

No caso da formulação proposta para o algoritmo da deconvolução, é importante ainda perceber que dos vários diferenciais de pressão gerados a partir de vazões impostas, deseja-se obter o valor do diferencial de pressão no teste para uma vazão unitária, daqui para frente chamado Δp_u e representante da resposta característica do sistema.

O gráfico da Figura 2-9 mostra a resposta característica de um dado reservatório (A) e um histórico de vazões em 4 períodos (B). A convolução dessa resposta com o histórico é responsável pela criação de 4 transientes (C). Isso ocorre porque a cada mudança de vazão é gerado um novo transiente. A superposição destes transientes é responsável pela forma final da carta de teste (D).

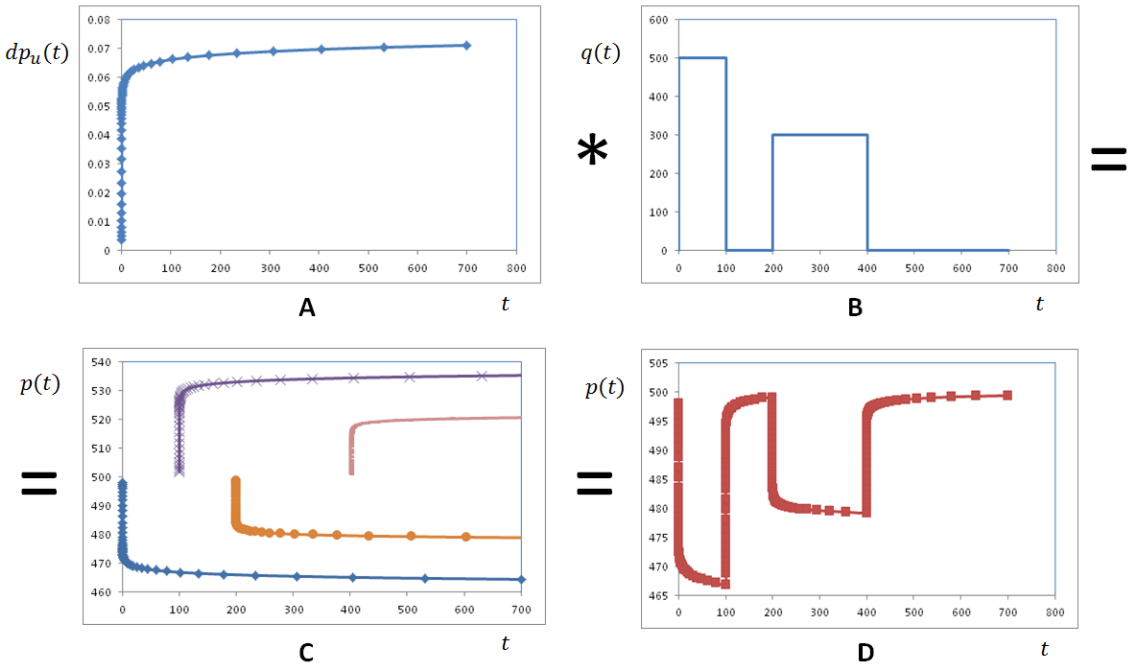

Figura 2-9 – Convolução e superposição

2.3 Regime Radial Infinito

Não é do interesse do autor descrever os modelos analíticos existentes. Entretanto, é conveniente explorar aquele que, seguramente, é o mais importante.

O regime radial infinito é o mais recorrente em função da própria geometria dos sistemas. Se o intervalo canhoneado é uma superfície de interface cilíndrica, então a propagação do transiente de pressões, até que este encontre algum obstáculo significativo no reservatório, se dá de forma radial “infinita”.

Portanto, seja um sistema infinito para o tempo de teste, com pressão inicial p_0, submetido a uma retirada de massa a uma taxa q constante. Esse sistema estará submetido a uma difusão hidráulica, cuja equação governante pode ser escrita como:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Ou, considerando um sistema radial:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Onde:

- $\eta = \frac{k}{\phi \mu c_t}$ é a constante de difusão hidráulica;
- k é a permeabilidade efetiva do meio;
- ϕ é a porosidade;
- μ é a viscosidade dinâmica do fluido e
- c_t é a compressibilidade total da formação.

As equações (2.1) e (2.2) apresentam um membro dependente do espaço e outro do tempo, denotando, como dito, o caráter transiente do problema.

Por hipótese, para o desenvolvimento em curso, o sistema é assumido em total equilíbrio antes do teste. Portanto, a condição inicial, descrita em termos matemáticos, é:

$$p(r, t = 0) = p_0, \qquad \forall\, r \qquad \textbf{(2.3)}$$

Assumindo uma vazão constante, a condição de contorno interna é:

$$q = \frac{2\pi kh}{B\mu}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_w} = constante \qquad \textbf{(2.4)}$$

Onde B é o fator volume de formação.

A expressão (2.4) corresponde à Lei de Darcy escrita em coordenadas radiais, sendo aqui negligenciados quaisquer efeitos gravitacionais.

No caso aqui exposto, a solução é fornecida para vazão constante. Mais tarde, no capítulo 5 (Convolução e Deconvolução), o enfoque será voltado para vazão variável.

Considerando, assim, o reservatório como sendo de extensão infinita para os tempos de teste[2], a seguinte condição de contorno externa deve ser respeitada:

$$\lim_{r\to\infty} p(r,t) = p_0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

Onde p_0 é a pressão média inicial.

Portanto, numa distância muito grande do poço não deve haver variação de pressão.

A solução aproximada do conjunto de equações formadas por (2.2) a (2.5) é dada por:

$$\Delta p = p_0 - p_w(t) \cong \frac{qB\mu}{4\pi kh}\ln\left(\frac{4}{e^{\gamma}}\frac{kt}{\phi\mu c_t r_w^2}\right) \qquad \textbf{(2.6)}$$

Ou:

$$\frac{\Delta p(t)}{q} \cong \frac{B\mu}{4\pi kh}\ln\left(\frac{4}{e^{\gamma}}\frac{kt}{\phi\mu c_t r_w^2}\right) \qquad \textbf{(2.7)}$$

Onde $\gamma \cong 0{,}577215665$ é chamada constante de Euler-Mascheroni.

Portanto, a queda de pressão, expressa por (2.6), ou a queda de pressão normalizada, dada por (2.7), deve ter um aspecto logarítmico em relação ao tempo.

[2] O transiente, que se propaga à medida que o tempo transcorre, não chega a atingir qualquer obstáculo.

Devido à grande recorrência do regime de fluxo em questão e às propriedades que dele podem ser obtidas, busca-se linearizá-lo, o que pode ser visto num gráfico de diagnóstico (Figura 2-10).

Este gráfico é composto por 2 curvas: a superior é a curva de variação de pressão e a inferior é a derivada de Bourdet. A derivada de pressões permite a identificação dos regimes de fluxo atingidos durante o teste e, por definição, calculada como (BOURDET, 1989):

$$\Delta p'(t) \equiv \frac{d\Delta p(t)}{d \ln t} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Assim, aplicando-se a definição de (2.8) a (2.7), temos:

$$\Delta p'(t) \equiv \frac{B\mu}{4\pi\kappa h} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Como mostrado pela equação (2.9), a derivada logarítmica de um período de teste em regime radial é observada através de um patamar no gráfico de diagnóstico, de cujo valor pode-se determinar o parâmetro k.

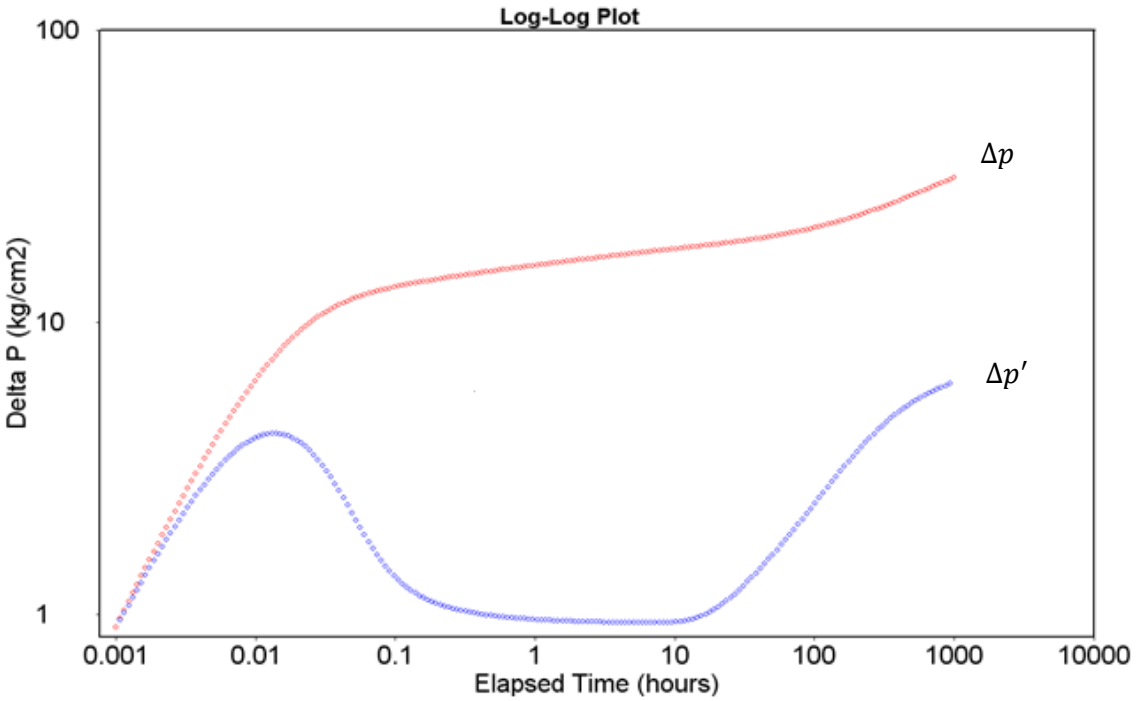

Figura 2-10 – Gráfico de Diagnóstico

Neste gráfico, podem ser observadas as subidas e descidas da curva de derivada. Estas representam, respectivamente, perdas e ganhos de transmissibilidade, $\left(\frac{kh}{\mu}\right)$, em posições distintas do reservatório. No gráfico de diagnóstico a transmissibilidade aumenta no sentido negativo do eixo vertical.

No início do gráfico (Figura 2-10) pode-se visualizar o final do regime de estocagem, efeito de curto tempo. O fluxo radial infinito aparece no gráfico quando $\Delta p'$ se estabiliza horizontalmente. No final da curva, após o transiente encontrar uma fronteira no reservatório, a transmissibilidade se reduz.

Com este entendimento, pode-se também observar o comportamento do transiente a partir de um modelo numérico e o gráfico de diagnóstico simultaneamente. Na Figura 2-11, o raio de investigação do teste, dado pelo alcance do transiente, é mostrado em 4 diferentes momentos. Na Figura 2-12 pode ser vista a posição do transiente em tais momentos.

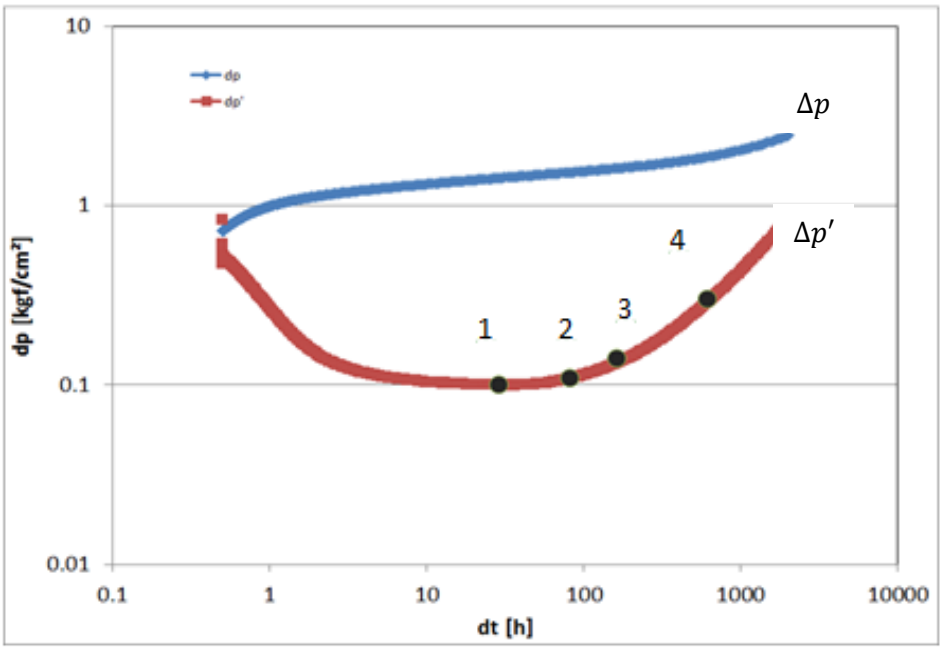

Figura 2-11 – Gráfico de diagnóstico apontando as variações na derivada de pressão decorrentes dos regimes de fluxo encontrados

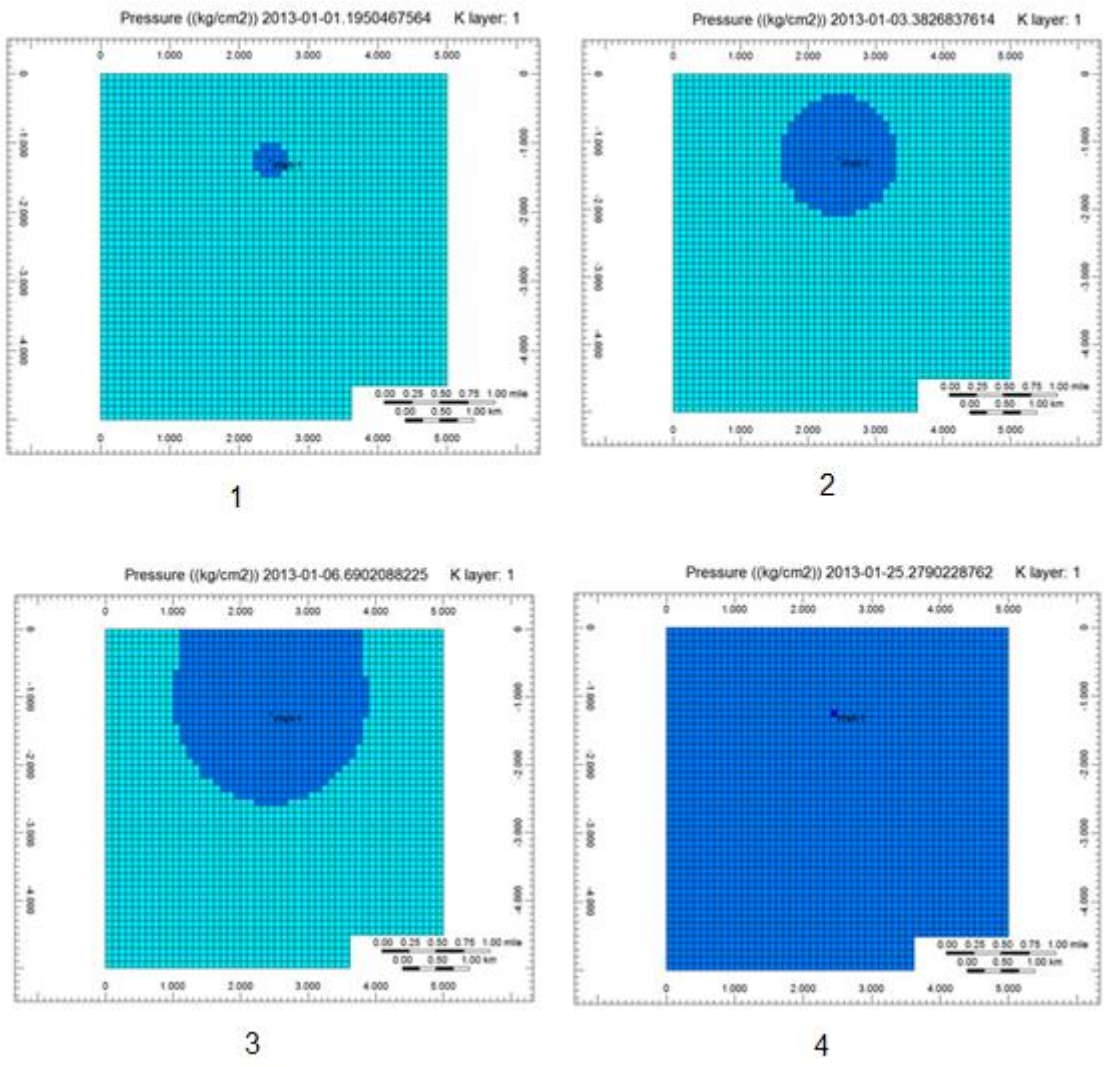

Figura 2-12 – Propagação do transiente de pressão no reservatório

No último momento registrado o transiente já atingiu as fronteiras do reservatório e já apresenta um desvio considerável do comportamento de extensão infinita, como sugere a inclinação da derivada.

2.4 Estocagem

Num teste, após a abertura para fluxo de um poço inicialmente estático, a vazão de hidrocarbonetos medida na cabeça do poço (*choke manifold*) vem, em maior parte, da descompressão natural dos fluidos retidos no poço. Neste momento, produção de

fluido proveniente do próprio reservatório é nula ou muito pequena e, portanto, esta vazão não corresponde à vazão calculada na superfície.

Esse efeito, que ocorre no início do teste, é chamado de estocagem e não é um efeito de reservatório, mas de poço.

A estocagem ocorre tanto nos períodos de fluxo quanto nas estáticas, sendo menos importante nas últimas. No entanto, em alguns testes em que não há válvula de fundo, o fechamento para estática ocorre na superfície. Há, então, uma estocagem maior. Isso ocorre porque há um maior espaço para a compressão do fluido.

Tal fenômeno pode ser visto esquematicamente na Figura 2-13. O fluxo na superfície está representado em azul e o fluxo na face do reservatório para o poço em vermelho.

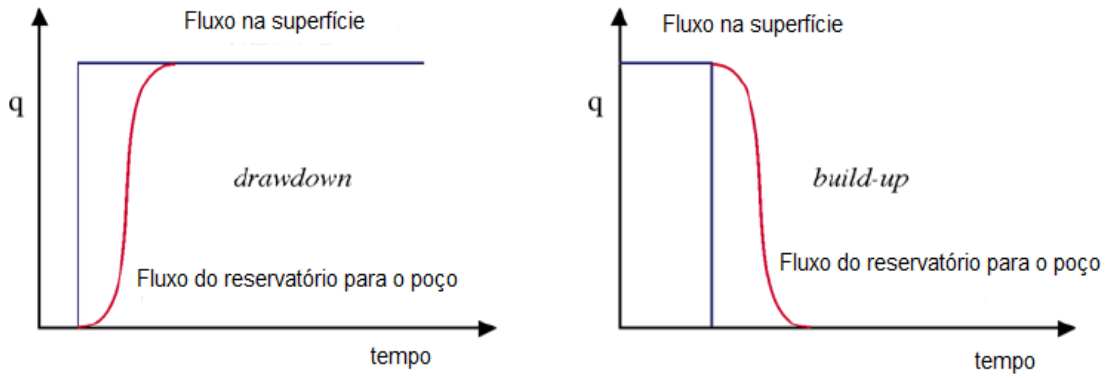

Figura 2-13 – Diferença entre vazão medida na superfície e vazão fluindo para o poço no fundo (HOUZÉ *et al*., 2012. Tradução do autor)

A presença de gases no óleo, principalmente em poços surgentes, também é importante para um maior ou menor grau da estocagem.

2.5 Dano

O dano à formação é provocado por alterações impostas ao reservatório nas imediações do poço, relacionadas às várias etapas de perfuração, completação e canhoneio do intervalo em objeto.

O dano à formação ocorre devido a fatores geológicos ou mecânicos resultantes de atividades de exploração ou fenômenos físicos que ocorrem no reservatório. Geralmente, o dano é caracterizado por:

- Redução da permeabilidade absoluta da formação, causada pelo tamponamento de canais de fluxo;
- Redução da permeabilidade relativa ao óleo, devido ao aumento da saturação de água ou gás;
- Aumento da viscosidade do óleo.

O efeito de película, ou *skin* (S), é o modelo matemático usado na Engenharia de Reservatórios para simular esta situação. Se o efeito for quantificado positivamente, há uma perda de produtividade do reservatório, falando-se em dano. Se negativo, há uma melhora na produtividade em relação às condições ideais para a geometria do reservatório. Nesse caso, chama-se estimulação (Figura 2-14).

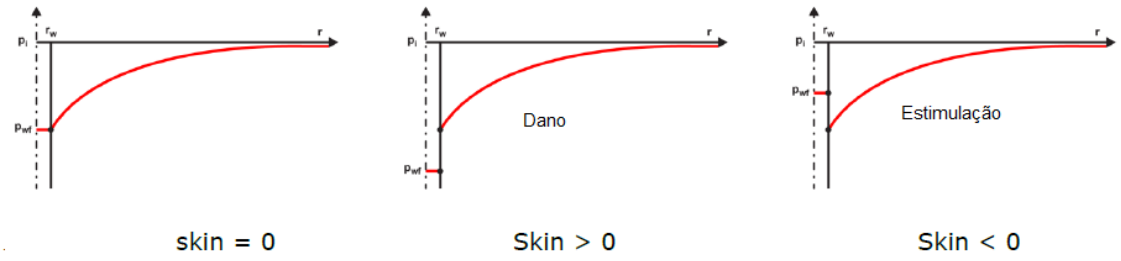

Figura 2-14 – Convenção para utilização do skin em dano ou estimulação (HOUZÉ *et al*., 2012. Tradução do autor)

Alguns poços que tiveram sua produtividade reduzida podem ser estimulados. No caso das formações areníticas, a técnica de faturamento hidráulico (ou fracking) é a mais comum. No caso das carbonáticas, a acidificação é mais recomendada.

Portanto, a quantificação do *skin* é um dos interesses da Avaliação de Formações. Muitas vezes não é possível determinar a causa do dano, mas é possível quantificá-lo através da interpretação dos testes de poços. Com isso, torna-se possível decidir sobre possíveis intervenções para o aumento da produtividade.

Cabe também ressaltar que o papel do *skin*, assim como da estocagem, é muito maior nos períodos de fluxo. Este é um dos fatores que reforçam a importância das estáticas para a interpretação, como será visto a seguir.

2.6 Períodos de fluxo e de estática

Um teste ideal para a interpretação ocorreria caso fosse possível impor um único período de fluxo durante todo o tempo disponível. Entretanto, os períodos de fluxo não são adequados para a interpretação devido a sua irregularidade. Assim, para que se tenha dados com maior confiabilidade, são necessárias condições estáticas de medição.

Deste modo, um teste de formação corresponde a uma sucessão de períodos de fluxo e de estática. Habitualmente, os períodos de estática são os interpretados. As vantagens destes últimos estão resumidas na Tabela 2-1.

Tabela 2-1 - Vantagens das estáticas em relação aos fluxos

	FLUXO	ESTÁTICA
ESTOCAGEM	grande	pequena
IMPORTÂNCIA DO DANO	grande	pequena
IMPORTÂNCIA DA VARIAÇÃO DO DANO	grande	nenhuma
RUÍDO	grande	pequena
INCERTEZA NOS DADOS DE VAZÃO	presente	nenhuma

Como é de costume interpretar as estáticas, é importante ter o registro de duas delas ou mais. Assim, torna-se possível verificar seu aspecto, ou seja, saber se a resposta em cada uma delas se reproduz, e verificar a consistência do histórico de vazões adotado.

3 Interpretação de testes de pressão

3.1 O processo analítico

O processo analítico da interpretação se baseia na identificação dos regimes de escoamento revelados pelo reservatório no decorrer do tempo, e na adoção de um modelo matemático simplificado para descrevê-lo. Pode-se, assim, estimar parâmetros que representam o comportamento do reservatório.

A adoção desse modelo envolve conhecimentos matemáticos e físicos que passam pelo entendimento dos diversos regimes de fluxo passíveis de ocorrência no sistema, os quais são geralmente divididos em: de curto, de médio e de longo tempo.

Os dados do registrador aparecem na Figura 3-1 e o modelo que descreve tais dados, caso as propriedades corretas sejam nele incluídas, está representado na Figura 3-2.

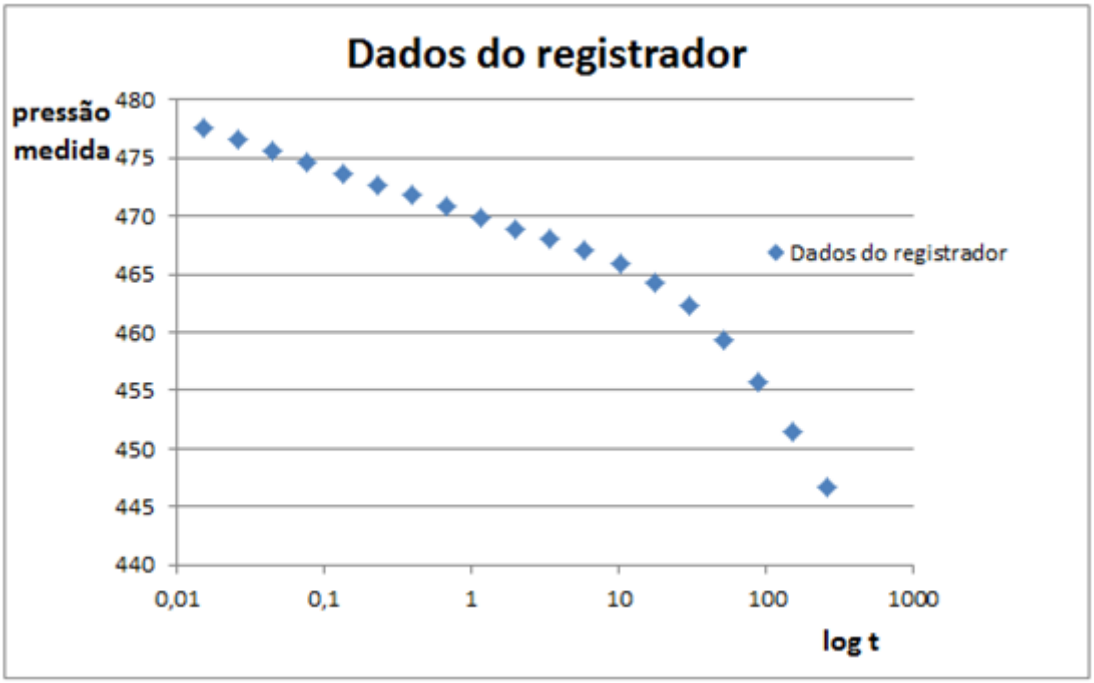

Figura 3-1 – Dados medidos pelo registrador

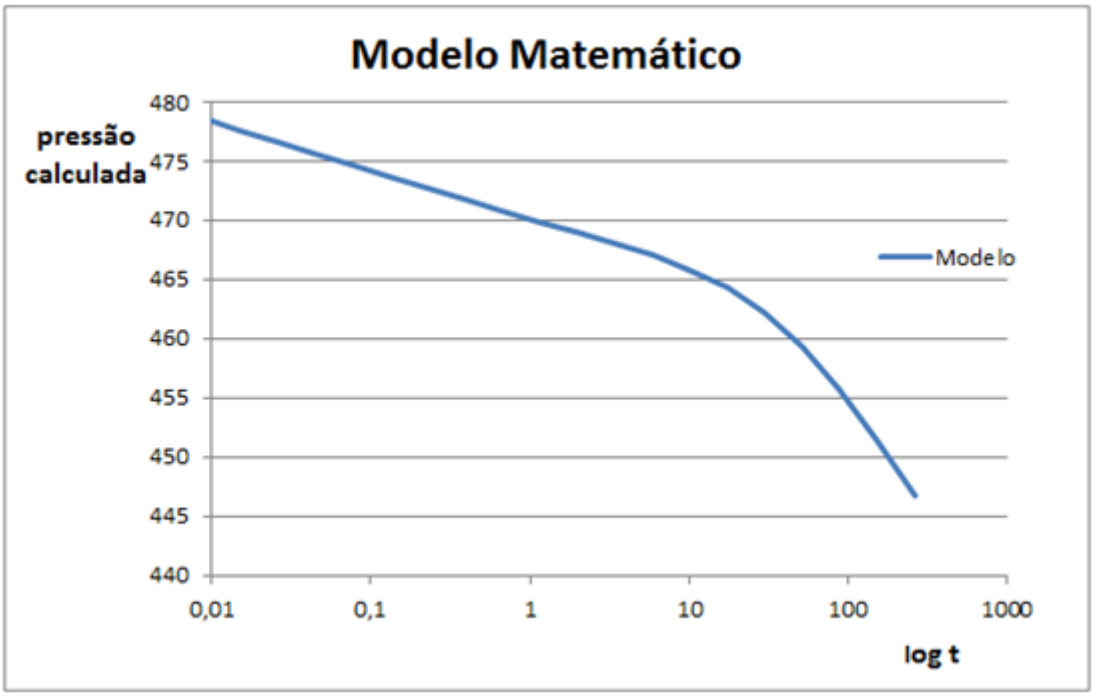

Figura 3-2 – Elaboração de um modelo analítico para descrever os dados medidos

A dificuldade dessa tarefa está no fato de que este sistema, representado pelo reservatório, se situa em subsuperfície e assim, não pode ser acessado. Desta forma, para que possamos descrevê-lo, é preciso que, ao gerarmos uma perturbação (*input*), analisemos sua resposta (*output*). Nesse caso, lidamos com um problema inverso (Figura 3-3).

De forma distinta, num problema direto, o *input* e o sistema são conhecidos e o que se deseja conhecer é o *output*, havendo como resposta apenas uma solução.

Na formulação de um modelo analítico para o comportamento do reservatório, ou do sistema do problema inverso, a possibilidade de várias soluções torna o papel do intérprete algo de grande importância para o sucesso da análise.

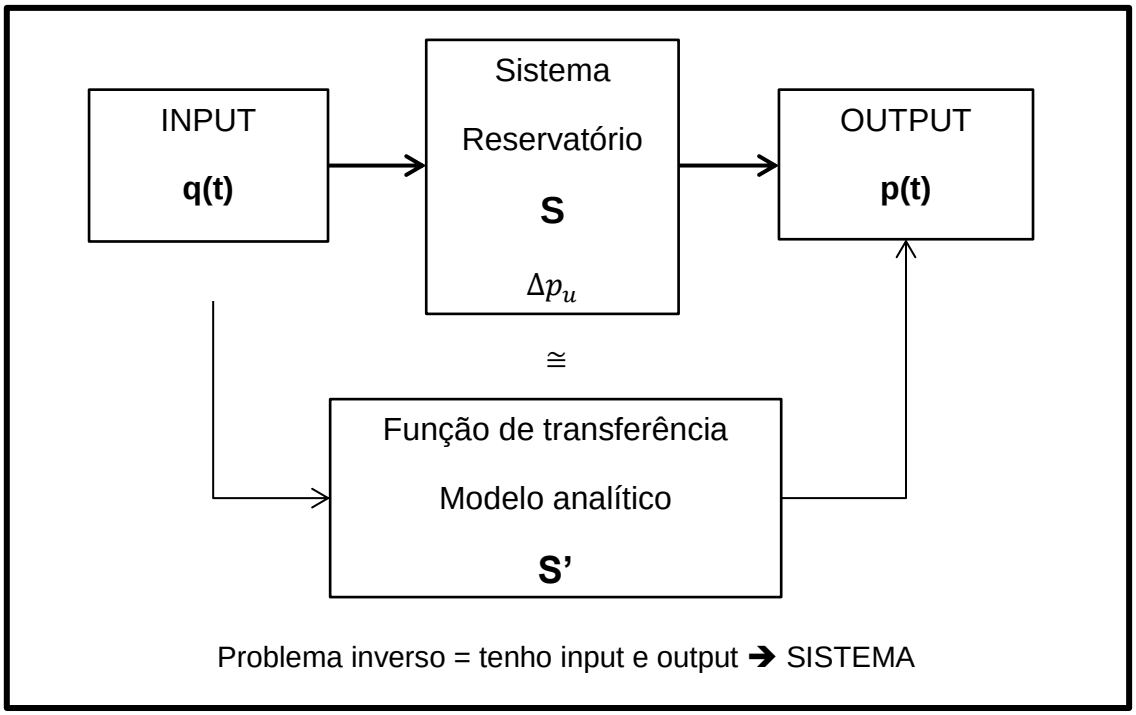

Figura 3-3 – Esquema do problema Inverso

Além disso, essa dificuldade faz com que, para a validação do modelo, se tenha a necessidade de recorrer a outras fontes de informação sobre o reservatório e a outros procedimentos que não só a adoção do modelo matemático que melhor descreve os parâmetros do meio.

Adotando o procedimento apresentado, a partir dos dados de vazão (entrada ou *input*) e dos dados de pressão (saída ou *output*), e com o auxílio das observações feitas a partir do gráfico de diagnóstico, podemos obter um modelo analítico equivalente *S'* para o reservatório *S*, meio que se quer caracterizar. Esse modelo S' pode ser chamado de função de transferência e representa a resposta característica do meio (interpretação convencional).

Uma outra possibilidade é a de tentar, antes mesmo da aplicação de qualquer modelagem, desvendar a resposta característica do sistema (deconvolução).

3.2 A interpretação no período pré-deconvolução e atualmente

O surgimento do algoritmo da deconvolução permitiu, como dito, que os dados disponíveis fossem melhor aproveitados e que se enxergasse o teste realizado de uma forma mais completa.

Para entender a evolução que se obteve com o algoritmo, é preciso perceber como ocorria a interpretação antes de sua concepção e como é feita hoje.

Na etapa inicial da interpretação, os dados de pressão e vazão medidos em campo são tratados. Nesta etapa, dados espúrios são eliminados. Sua ocorrência pode ser atribuída a diversos fatores que não a resposta do reservatório.

O intérprete define, na etapa posterior, os períodos de vazão (degraus) para dividir o teste, com vazões variáveis, em fluxos e estáticas e selecionar trechos de interesse para análise e modelagem.

Feito isso, passa-se então a uma verificação das estáticas. Aqui, duas ou mais estáticas são comparadas para que seja verificada sua consistência em dois aspectos: se a forma da resposta se repete e se exibem sobreposição no trecho correspondente ao regime radial infinito, indicando uma tendência para a resposta característica do meio e a confiabilidade das medições.

Diante disso, no período pré-deconvolução (Figura 3-4), nesta altura, era necessário adotar um modelo matemático que representasse o teste em curto, médio e longo tempo a partir dos dados de estática avaliados individualmente.

Feita a modelagem, era preciso verificar a qualidade do ajuste, aqui chamado de ajuste local por utilizar apenas os dados de estáticas. Caso não fosse aceitável, era preciso repetir o processo e adotar um novo. Caso fosse aceitável, era preciso ajustá-

lo ao teste globalmente, ou seja, ao teste inteiro, incluindo agora o comportamento durante períodos de fluxo. Sendo este ajuste confiável, terminava-se o processo.

Ocorria que, por vezes, mesmo com um ajuste local perfeito o global resultava insatisfatório. Deste modo, era necessário acrescentar heterogeneidades e efeitos de longo tempo e, por tentativa e erro, conseguir um bom ajuste global sem que o ajuste local fosse prejudicado.

O algoritmo da deconvolução, ao ser introduzido no processo (Figura 3-5) permitiu que a modelagem se tornasse mais eficaz, já que eliminava a necessidade de aprovação de um ajuste local e, posteriormente, global. Determinada a forma que representa a resposta característica do sistema, a modelagem é mais eficiente, já que um modelo capaz de representar esta forma deve ajustar o teste local e globalmente.

A deconvolução, por outro lado, usa todas as estáticas disponíveis para traçar único fluxo (queda de pressão) de duração correspondente ao todo do teste. A maneira como é feito esse processo será formulada matematicamente mais a frente.

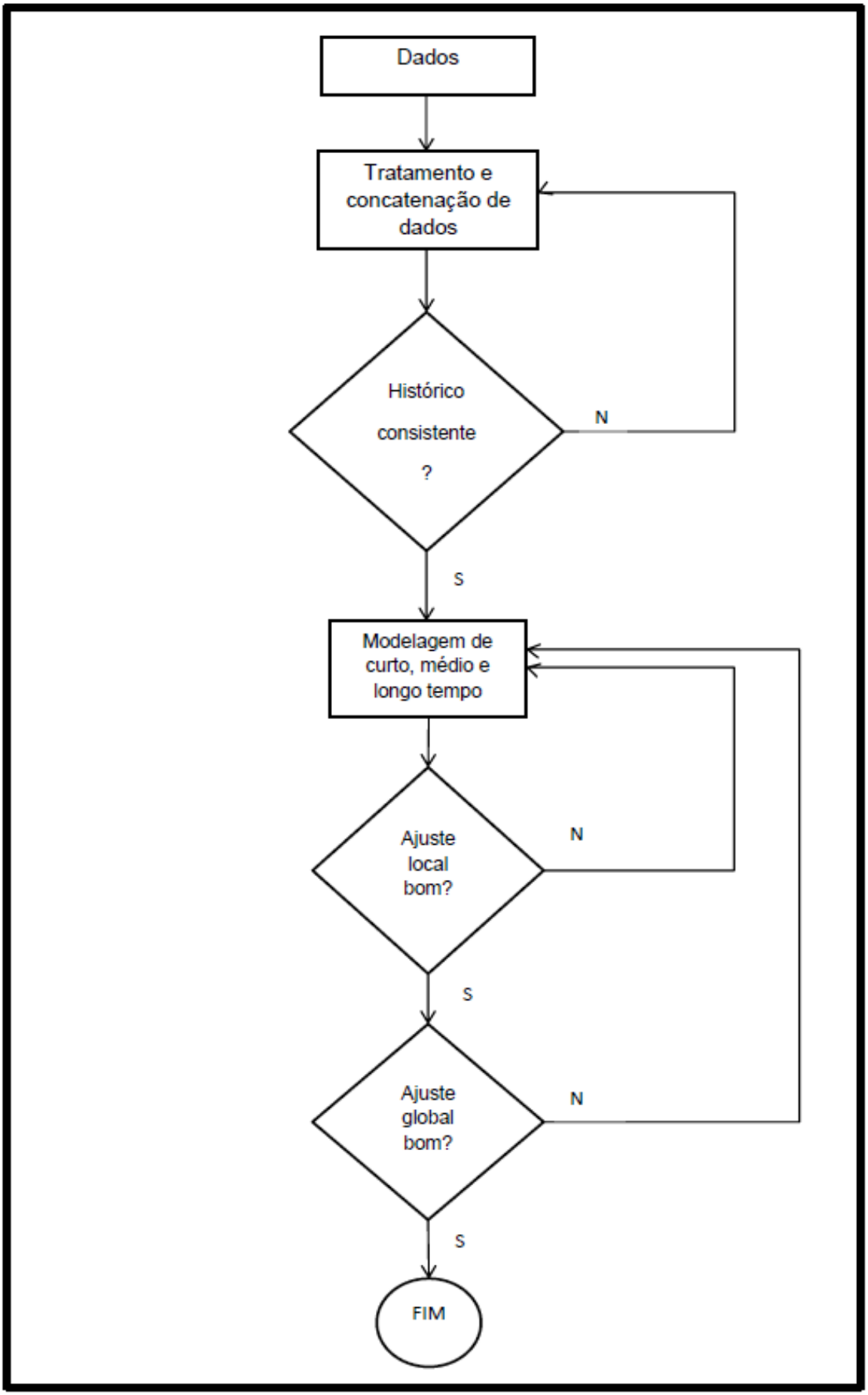

Figura 3-4 - Fluxograma da interpretação de testes da forma convencional

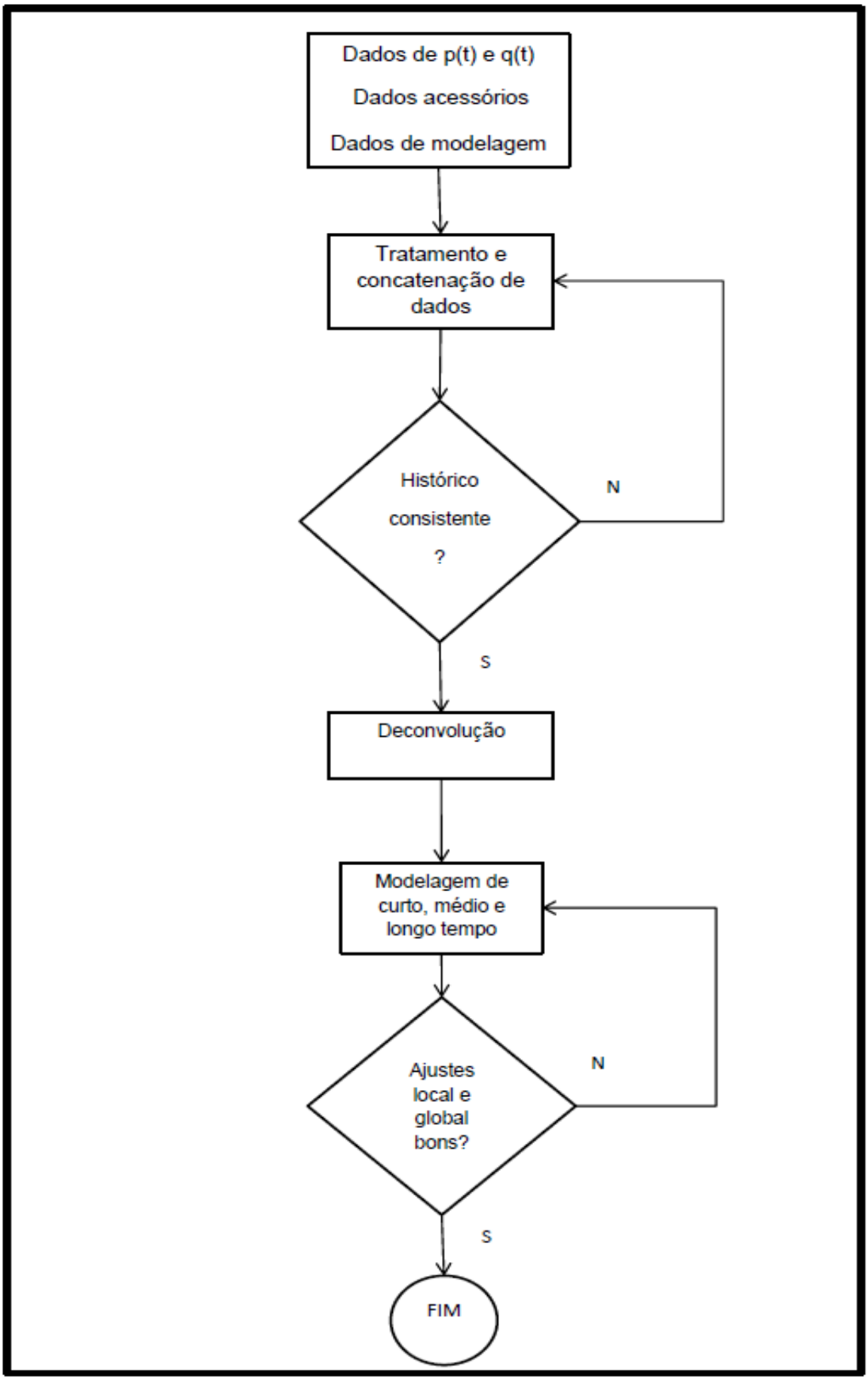

Figura 3-5 - Fluxograma da interpretação de testes com a introdução da deconvolução no processo

3.3 A Interpretação convencional *versus* a deconvolução

Explicados esses conceitos, podemos recapitular alguns assuntos discutidos no capítulo 2 e no início deste e analisar um exemplo que diferencia a interpretação exercida sem e com a deconvolução.

A Figura 3-6 mostra a carta de um teste real. A pressão (vermelho) é mostrada junto com a vazão (azul). Esta carta servirá de base para a interpretação.

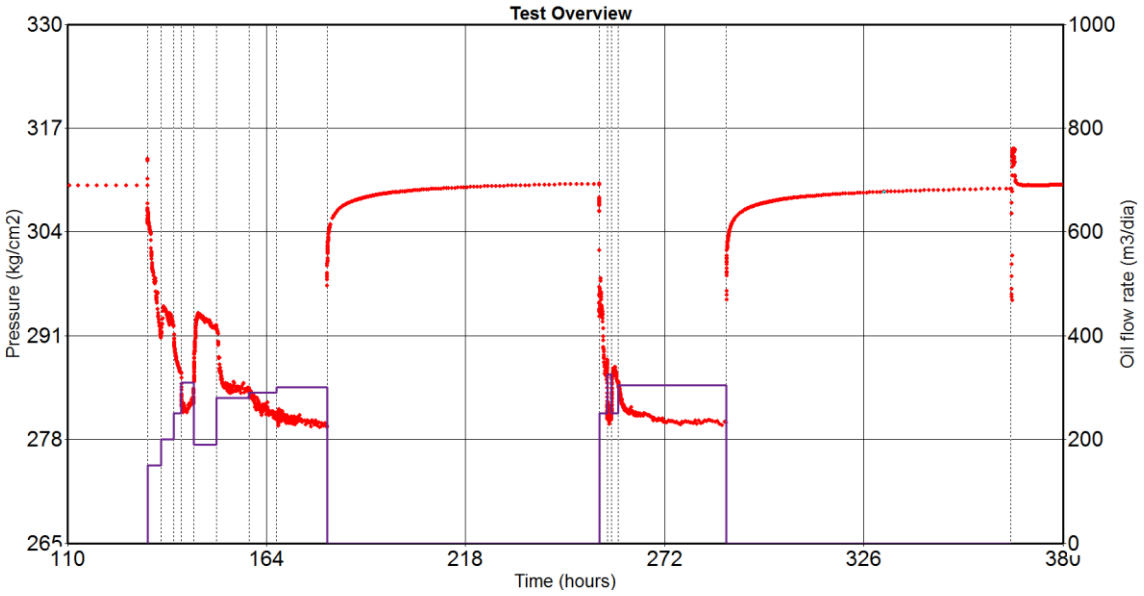

Figura 3-6 – Carta de um teste real

Numa interpretação convencional, plota-se então o gráfico de diagnóstico baseado nas duas estáticas. Adota-se então um modelo que possa representar bem os dados medidos (Figura 3-7).

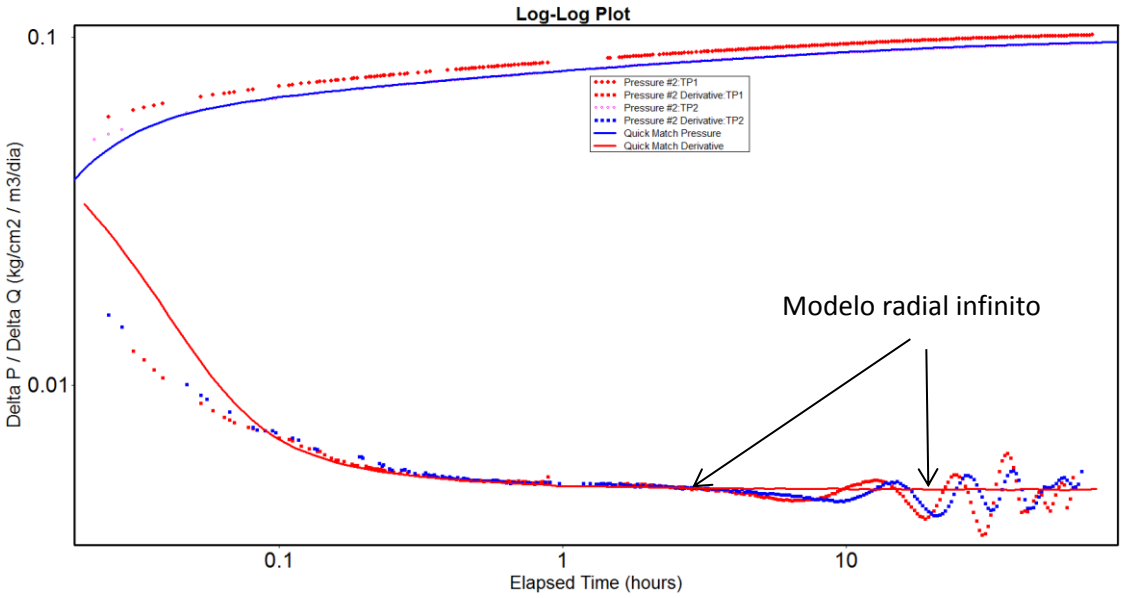

Figura 3-7 – Gráfico de diagnóstico com estáticas e modelo adotado

O modelo radial infinito (derivada; linha vermelha contínua), nesse caso, representa bem as estáticas, desconsiderando a variação de dano entre elas. Assim, pode-se fazer um ajuste global para a carta de teste (Figura 3-8).

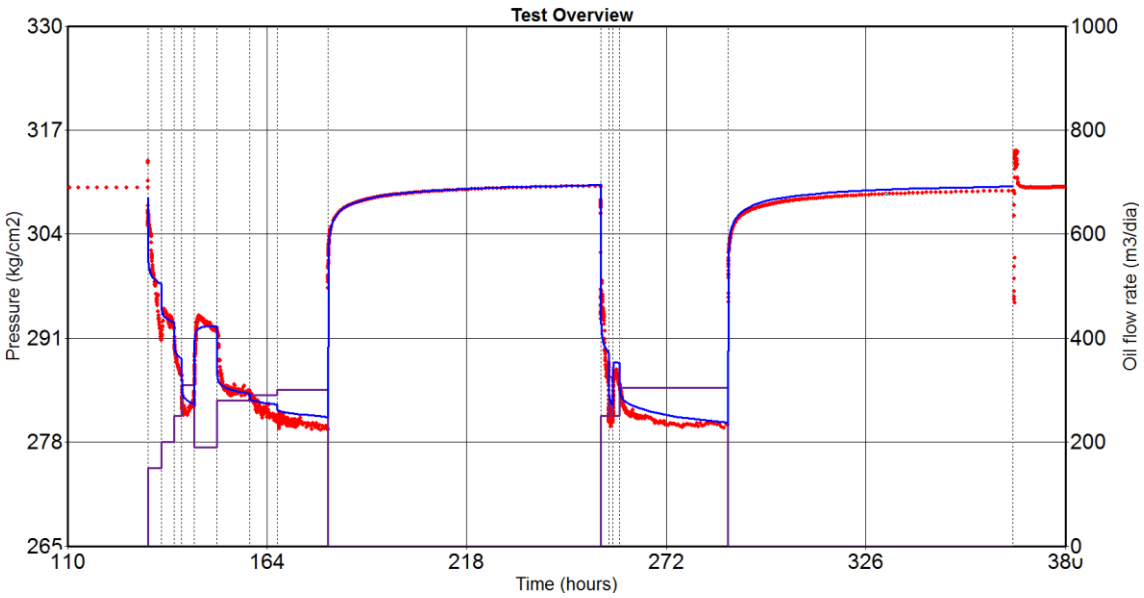

Figura 3-8 – Ajuste Global do teste

Nesse caso, o modelo homogêneo radial infinito da Figura 3-8 (vermelho) é insuficiente para representar o teste como um todo. Ampliando-se o gráfico, pode-se ver que a recuperação da pressão estática no *buildup* é mais demorada que na resposta do modelo (Figura 3-9).

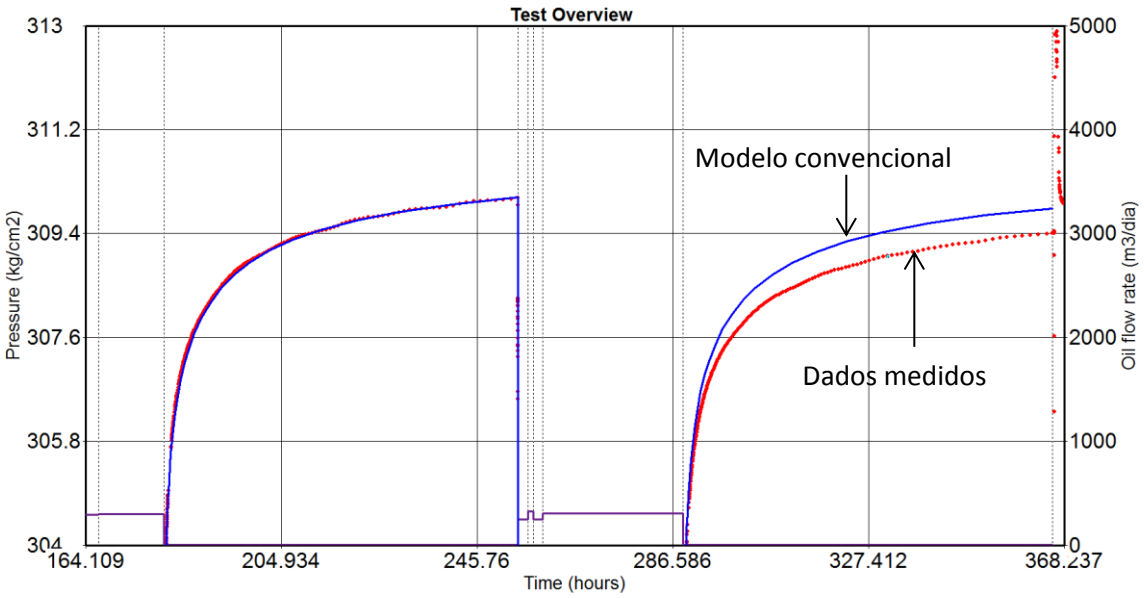

Figura 3-9 – Ajuste Global do teste

Assim, para encontrar o modelo adequado, é necessário lhe atribuir heterogeneidades não vistas diretamente nas estáticas. Esse processo se dá por tentativa e erro e é vinculado aos modelos que possam ser adotados, ou seja, a um “cardápio” restrito. É necessário, assim, modificar tal modelo, alterar suas propriedades e verificar novamente seus ajustes local e global.

Agora, por outro lado, fazendo-se a deconvolução (Figura 3-10), a melhor forma que se adequa ao teste é obtida de uma só vez (aparece separadamente no gráfico de diagnóstico).

A derivada da resposta deconvolvida exibe o comportamento de longo tempo e não apresenta o ruído evidenciado pelas derivadas da interpretação convencional.

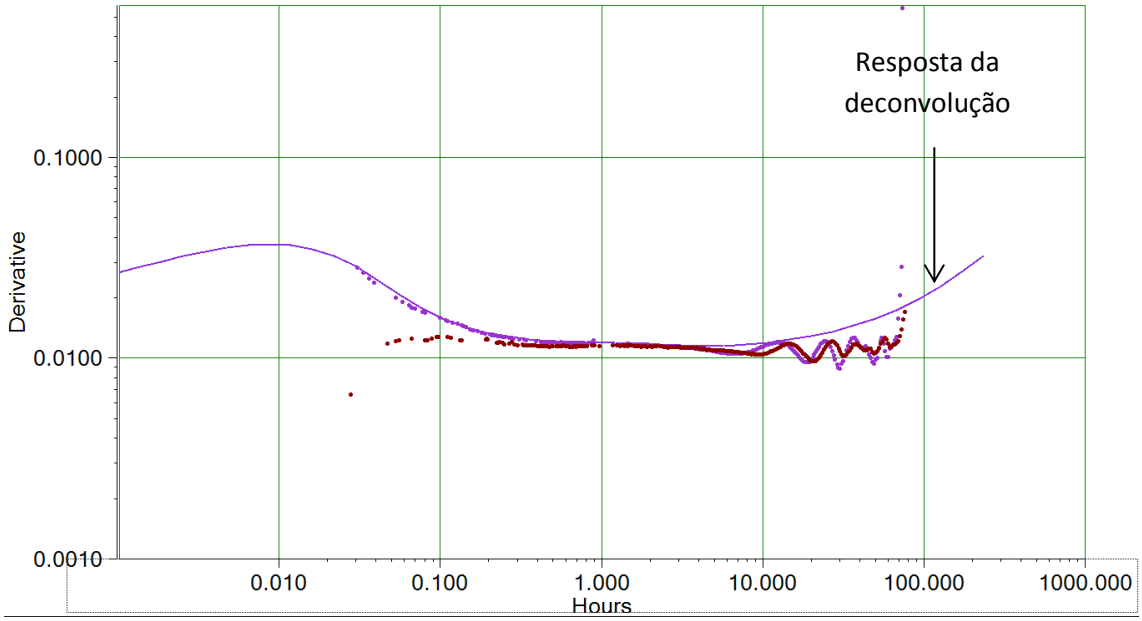

Figura 3-10 – Resposta deconvolvida e derivadas das estáticas

Esta forma de derivada se adequa ao teste tanto global quanto localmente. Assim, quando houver a modelagem (linha vermelha contínua, derivada), essa se adequa mais à carta de teste no ajuste realizado posteriormente (Figura 3-11).

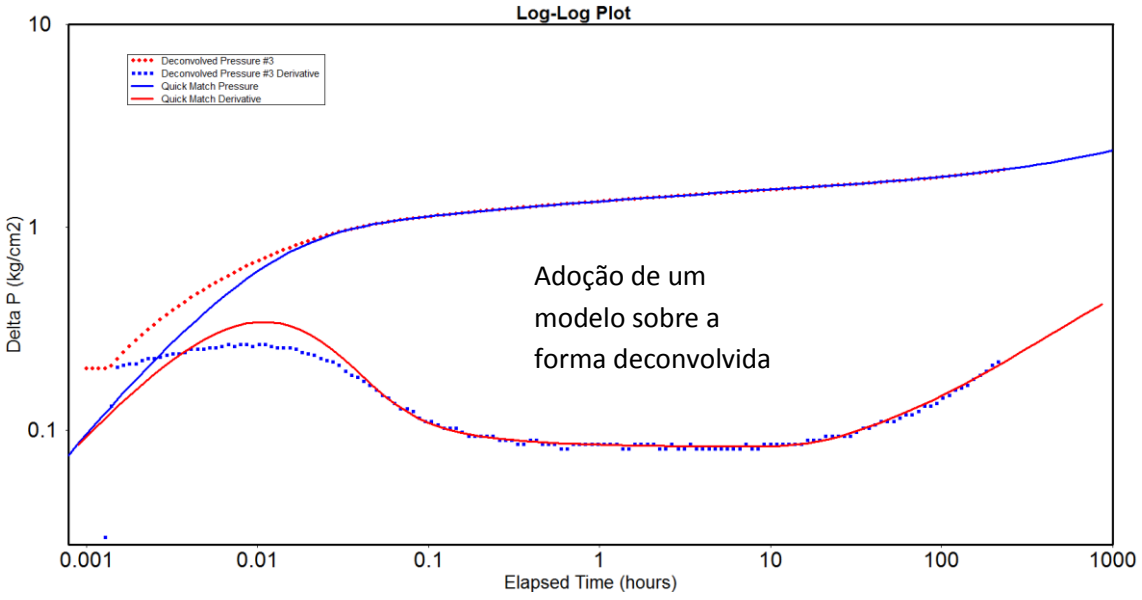

Figura 3-11 – Gráfico de diagnóstico

Pode-se comparar na Figura 3-12 a modelagem sem a deconvolução (curva azul) e a adotada pós-deconvolução (verde):

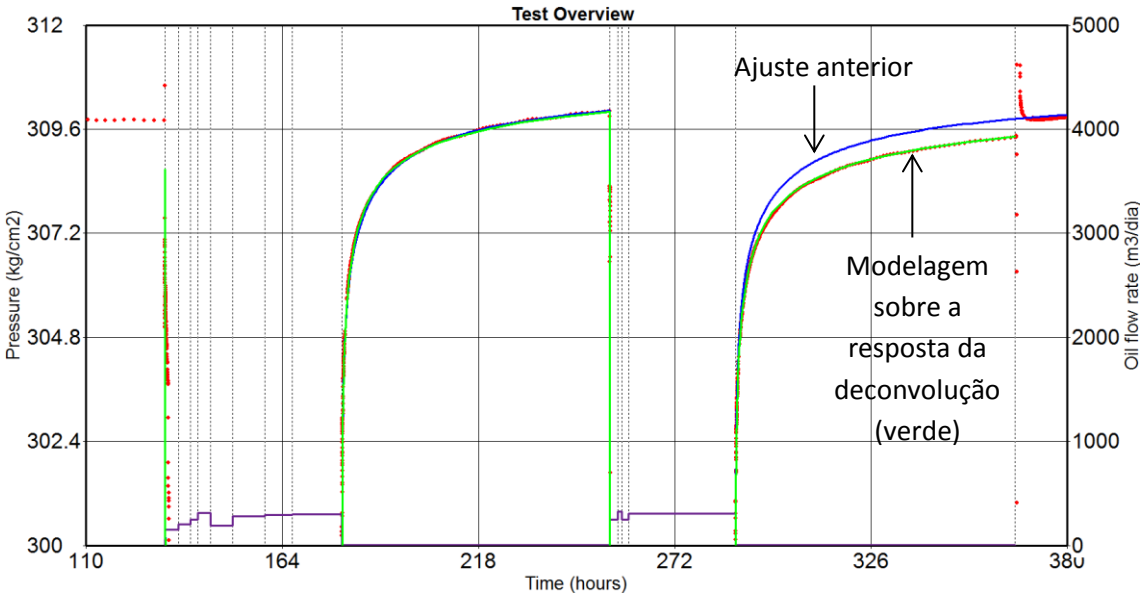

Figura 3-12 – Ajuste global anterior e após a deconvolução

4 Conceitos Fundamentais

Antes que se possa proceder à formulação e à implementação do algoritmo é necessário fazer uma breve revisão de alguns conceitos fundamentais que servirão de base para o entendimento do problema.

4.1 Diferenciação e Integração de Dados Discretos

4.1.1 Diferenciação

As derivadas de pressão dos testes de formação são calculadas a partir da seguinte expressão:

$$\Delta p_u{}'(t) \equiv \frac{d\Delta p_u(t)}{d\ln t} = t\,\frac{d\Delta p_u(t)}{dt} \qquad \textbf{(4.1)}$$

Como as pressões são medidas de forma discreta, é necessário fazer uso de um dispositivo numérico. O método mais utilizado consiste na Derivada de Bourdet (BOURDET, 1989). Esta pode ser obtida da seguinte forma:

A. Seleção de trios de pontos;
B. Ponderação das inclinações entre cada extremo e o ponto central pela seguinte expressão (4.2):

$$y' = \frac{(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}) * \Delta x_2 + (\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}) * \Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Essa expressão serve para o cálculo da derivada no ponto central selecionado (Figura 4-1).

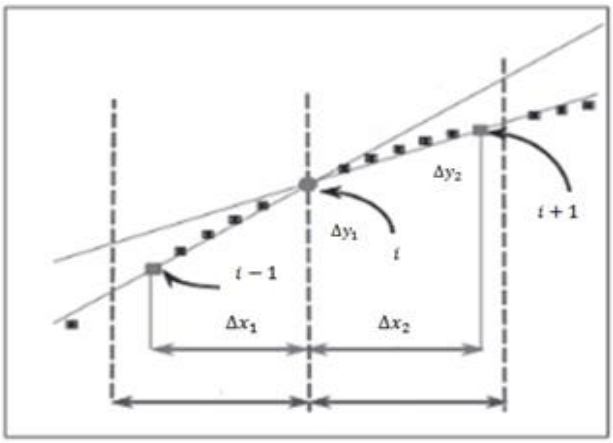

Figura 4-1 - Derivada y em relação a x (GRINGARTEN *et al*., 2008. Adaptado)

e onde:

$$\Delta y_1 = y_i - y_{i-1}$$

$$\Delta y_2 = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta x_1 = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta x_2 = x_{i+1} - x_i$$

Se esta técnica for seguidamente aplicada aos dados discretos disponíveis, o resultado da derivação é único, ou seja, só há uma solução.

Na Tabela 4-1, temos valores medidos para o dt e para dp_u, ou seja, a resposta do reservatório a uma vazão unitária. A derivação, feita através do software Excel, está representada na terceira coluna da tabela e é apenas uma resposta a partir de cada trio de pontos consecutivos (dt, dp_u).

Cabe lembrar que os valores de dt aqui estão distribuídos em escala logarítmica.

Tabela 4-1 - Diferenciação de dados

dt	dp_u	dp'_u
0,001	0,015452	
0,001778	0,020322	0,006935
0,003162	0,023435	0,004469
0,005623	0,025468	0,003124
0,01	0,027031	0,002567
0,017783	0,028423	0,00236
0,031623	0,029748	0,002273
0,056234	0,03104	0,00223
0,1	0,032315	0,002207
0,177828	0,033581	0,002193
0,316228	0,03484	0,002186
0,562341	0,036097	0,002181
1	0,037352	0,002179
1,778279	0,038605	0,00218
3,162278	0,039861	0,002224
5,623413	0,041165	0,002457
10	0,04269	0,003082
17,78279	0,044714	0,004228
31,62278	0,047557	0,005871
56,23413	0,051472	0,00775
100	0,05648	0,009474
177,8279	0,06238	0,010797
316,2278	0,06891	0,011694
562,3413	0,075843	0,012257
1000	0,083021	

A Figura 4-2 apresenta de forma gráfica os resultados obtidos a partir de tais dados.

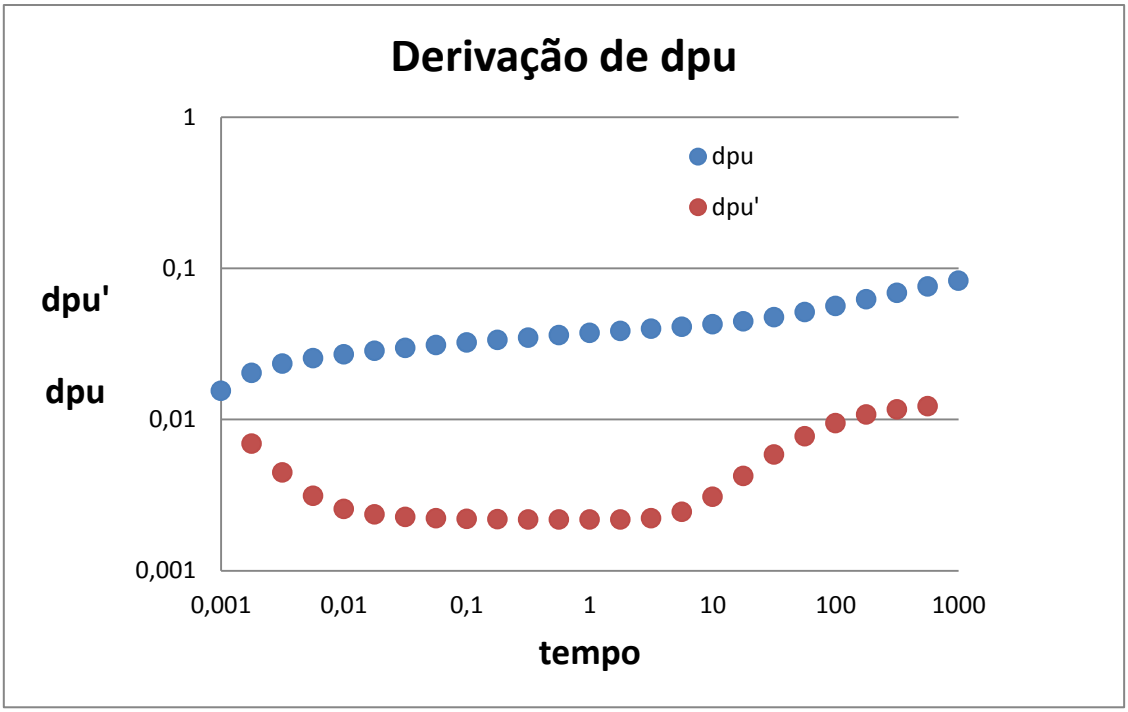

Figura 4-2 – Derivação de dados discretos

4.1.2 Integração

Se, por outro lado, a forma da derivada de pressão, $dp_u{}'$ no nosso caso, é conhecida, então é possível obter a curva de queda de pressão a partir de sua integração. A expressão (4.3) representa matematicamente esta operação.

$$\Delta p_u(t) = \int_0^t \Delta p'_u(t')\, d\ln t' \qquad \textbf{(4.3)}$$

De forma semelhante, no caso de uma curva discreta, pode-se usar a expressão (4.4), obtida através da regra dos trapézios.

$$\Delta p_u(t) = \Delta p_{u_0} + \sum_{j=1}^{M} (\Delta p'_{u_{j-1}} + \Delta p'_{u_j}) \frac{1}{2} \ln(\frac{t_j}{t_{j-1}}) \qquad \textbf{(4.4)}$$

onde M é o número de pontos disponíveis até t.

Ocorre que, em geral, não se conhece Δp_{u_0} e este precisa ser imposto.

De toda maneira, a aplicação desta técnica gera inúmeras respostas diferentes, dependendo do valor de Δp_{u_0} tomado. Ainda assim, todas as curvas obtidas devem apresentar a mesma forma, já que este valor apenas provoca nelas um deslocamento vertical.

Como exemplo, podemos tomar um conjunto de dados de dt e dp'_u. Podemos obter o diferencial de pressão através da integração dos dados disponíveis. Através da Regra dos Trapézios montamos a Tabela 4-2.

Tabela 4-2 - Integração de dados discretos

dt	dp_u	dp'_u
0,001	0,010761031	**0,010761031***
0,001778	0,006934728	0,01585289
0,003162	0,004468945	0,019135526
0,005623	0,003123536	0,021320872
0,01	0,002566918	0,022958925
0,017783	0,002359584	0,024376915
0,031623	0,002273003	0,02571027
0,056234	0,002230029	0,027006326
0,1	0,002206584	0,028283291
0,177828	0,002193307	0,029549683
0,316228	0,002185676	0,030810056
0,562341	0,002181254	0,032066957
1	0,002178698	0,033321853
1,778279	0,002179906	0,03457636
3,162278	0,002223509	0,035843766
5,623413	0,00245663	0,037190818
10	0,003082136	0,038785003
17,782794	0,004227501	0,040888885
31,622777	0,005870706	0,043795383
56,234133	0,007750272	0,047715815
100,000001	0,009474264	0,052673435
177,827942	0,01079703	0,058507983
316,227767	0,011694091	0,064981448
562,341326	0,012256954	0,071875113
1000	0,012846909	0,079100585

*adotado um valor para Δp_{u_0} igual a $\Delta p'_{u_0}$.

Com a aplicação desses dados, podemos visualizar num gráfico tanto a curva do diferencial de pressão quanto sua derivada.

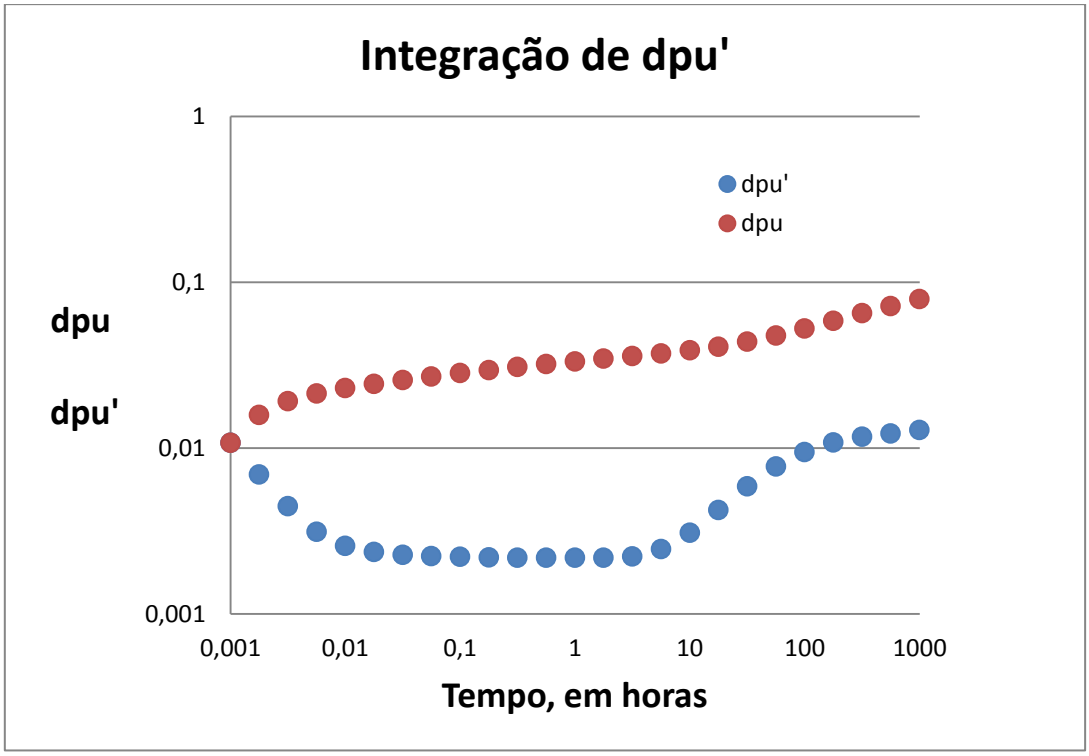

Figura 4.3 – Integração de dados discretos

4.2 Convolução e deconvolução

A resposta de um sistema poço-reservatório, $\Delta p(t)$, a um histórico de vazões variável, $q(t)$, é governado pela equação:

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(t-\tau)\frac{\partial \Delta p_u(\tau)}{\partial t} d\tau \qquad \textbf{(4.5)}$$

Onde:

- τ representa uma variável de integração.

- $\Delta p(t)$ e $q(t)$ são, respectivamente, a queda de pressão e o histórico de vazões, medidos.
- $\Delta p_u(t)$ é a resposta do sistema a uma vazão unitária, habitualmente desconhecida.

Como mostrado, a Figura 4-3 é um diagrama do processo que, através de um histórico de vazões (*input*) e da variação de pressão (*output*), busca determinar o diferencial de pressão correspondente a uma vazão unitária.

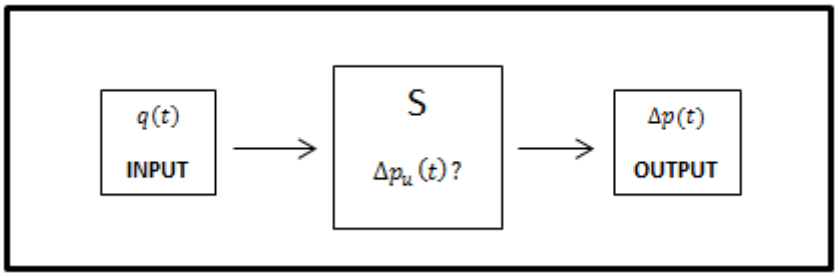

Figura 4-3 – Problema inverso aplicado aos testes de formação

A equação (4.5) é conhecida como convolução, ou integral de Volterra de 1ª espécie, ou ainda Princípio de Duhamel.

Por sua propriedade comutativa, a equação (4.5) também pode ser escrita como:

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(\tau) \frac{\partial \Delta p_u(t-\tau)}{\partial t} d\tau \qquad \textbf{(4.6)}$$

Ou ainda de forma compacta, como:

$$\Delta p(t) = \{q * \frac{\partial \Delta p_u}{\partial t}\}(t) \qquad \textbf{(4.7)}$$

ou

$$\Delta p(t) = q(t) * \frac{\partial \Delta p_u(t)}{\partial t} \tag{4.8}$$

Onde $*$ é o símbolo que denota a convolução.

As equações (4.5) a (4.8) são válidas para históricos de vazões quaisquer.

A deconvolução, matéria de nosso interesse, nada mais seria do que a extração de $\Delta p_u(t)$ a partir de um histórico de vazões variável.

Esse $\Delta p_u(t)$ é encontrado a partir da integração de curva de $\Delta p'_u(t)$, ponto de partida da deconvolução. Aqui, são estabelecidas apenas as restrições para a integração, tornando a resolução do problema um algoritmo de minimização de erro.

Como em testes de formação são impostos históricos de vazão sob a forma de degraus (Figura 4-4), a equação (4.2), por exemplo, pode ser simplificada para:

$$\begin{aligned}\Delta p(t) = \int_{t_0}^{t_1} q_1(\tau) \frac{\partial \Delta p_u(t-\tau)}{\partial t} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} q_2(\tau) \frac{\partial \Delta p_u(t-\tau)}{\partial t} d\tau + \cdots \\ + \int_{t_{N-1}}^{t} q_N(\tau) \frac{\partial \Delta p_u(t-\tau)}{\partial t} d\tau\end{aligned} \tag{4.9}$$

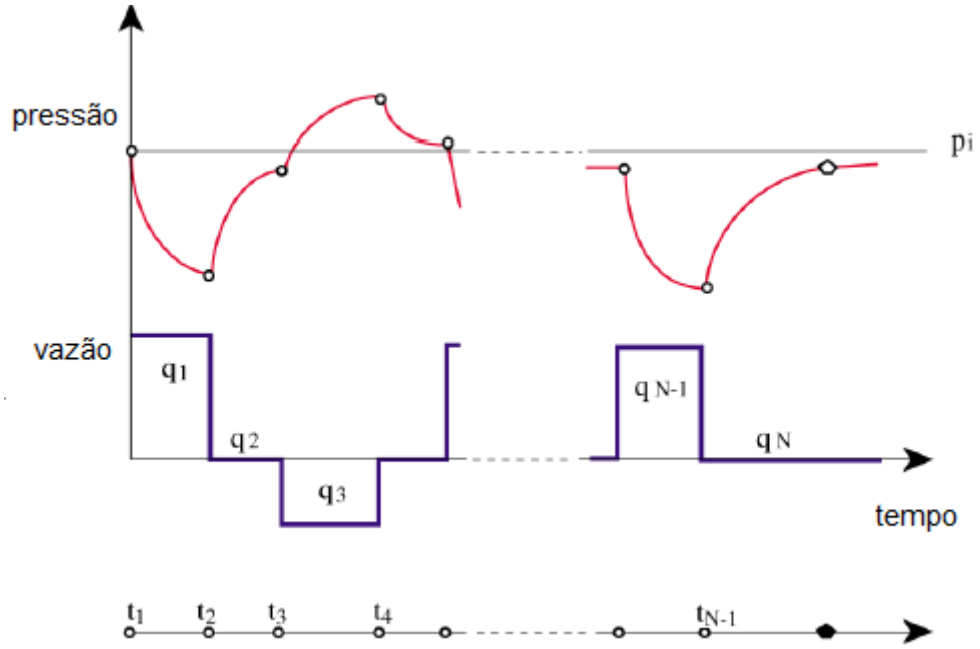

Figura 4-4 – Histórico de vazões no tempo (HOUZÉ *et al*., 2012)

Onde $q_j(t) = q_j = constante$, para $j = 1,2 \dots N$, onde N é o número de períodos em análise.

Deste modo, a equação (4.9) pode ser reescrita como:

$$\Delta p(t) = \sum_{j=1}^{N-1} q_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial \Delta p_u(t-\tau)}{\partial t} d\tau + q_N \int_{t_{j-1}}^{t} \frac{\partial \Delta p_u(t-\tau)}{\partial t} d\tau \qquad \textbf{(4.10)}$$

Aplicando-se a transformação de variáveis:

$$t' = t - \tau$$

Logo, temos:

$$\frac{dt'}{d\tau} = -1$$

$$dt' = -d\tau \tag{4.11}$$

$$\tau = t_{j-1} \;\rightarrow\; t' = t - t_{j-1}$$

$$\tau = t_j \;\rightarrow\; t' = t - t_j$$

Passa-se, então, a ter:

$$\Delta p(t) = \sum_{j=1}^{N} q_j \int_{t-t_{j-1}}^{t-t_j} \frac{\partial \Delta p_u(t')}{\partial t}(-\,dt') \tag{4.12}$$

Ou, calculando-se a integral:

$$\Delta p(t) = \sum_{j=1}^{N} q_j \left[\Delta p_u\left(t - t_{j-1}\right) - \Delta p_u(t - t_j)\right] \tag{4.13}$$

Note-se que na expressão (4.13) a variável tempo é argumento da função Δp_u e não a multiplica.

Ou ainda, rearrajando-se os termos do somatório de (4.8):

$$\Delta p(t) = \sum_{j=1}^{N} (q_j - q_{j-1})[\Delta p_u(t - t_{j-1})] \tag{4.14}$$

A expressão (4.14) é uma das mais importantes entre as empregadas em interpretação de testes de formação e também é conhecida como função de superposição. Sua interpretação gráfica pode ser vista na Figura 4-5.

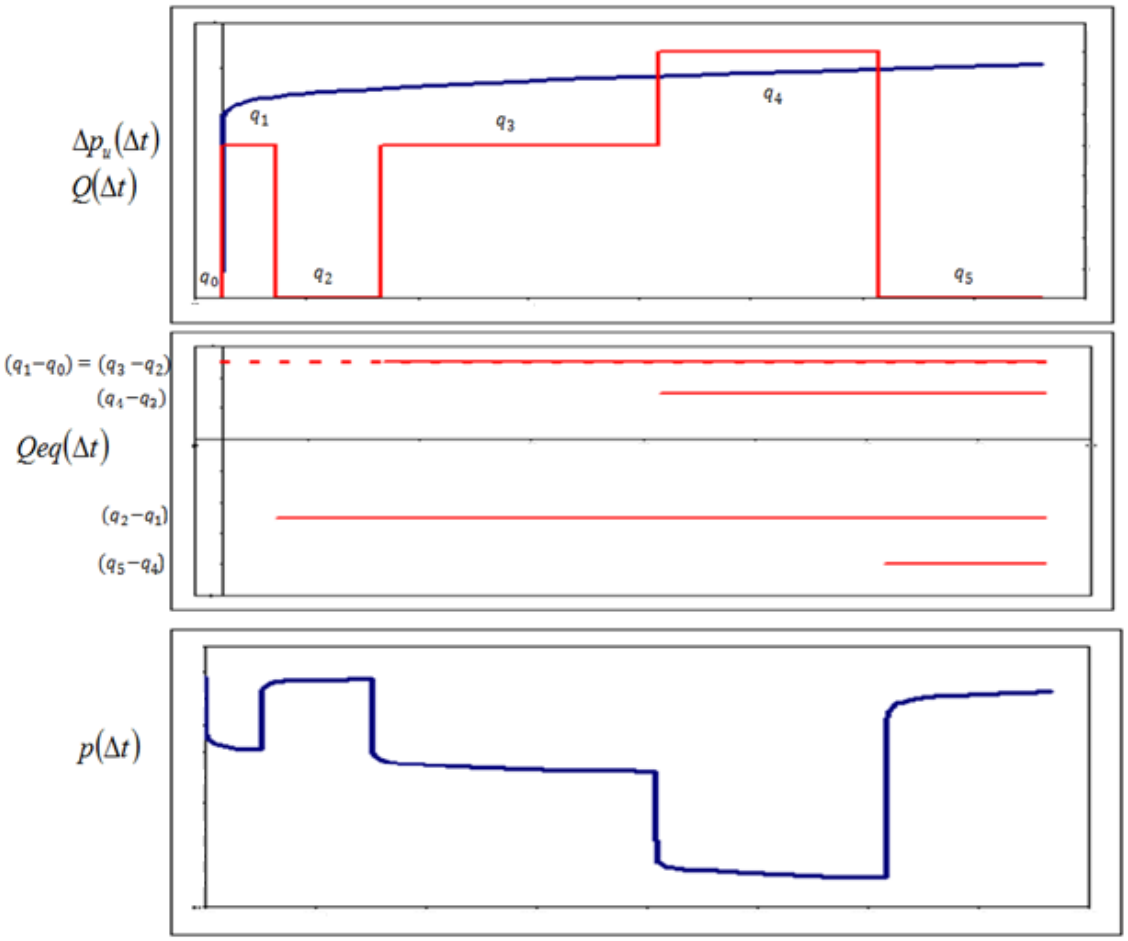

Figura 4-5 – Variação de pressão unitária e superposição dos efeitos em testes de formação

Tendo-se em mente que o algoritmo de deconvolução, objeto de estudo desta monografia, tem como ponto de partida a forma da derivada de pressão e que esta, como visto, é definida como:

$$\Delta p'(t) \equiv \frac{d\Delta p(t)}{d\ln(t)} = t\,\frac{d\Delta p(t)}{dt} \quad , \qquad \textbf{(4.15)}$$

então, o integrando do 2º membro de (4.1) pode ser multiplicado e dividido por τ, resultando em:

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(t-\tau)\left[\tau\frac{\partial \Delta p_u(\tau)}{\partial t}\right]\frac{d\tau}{\tau} \qquad \textbf{(4.16)}$$

Aqui, o termo $\left[\tau\frac{\partial \Delta p_u(\tau)}{\partial t}\right]$ é, por definição, a derivada da pressão, como mostrado em (4.15).

Conforme VON SCHROËTER *et al*. (2001, 2004), para que se evite a profusão de constantes de multiplicação, pode-se fazer a seguinte transformação:

$$t' = \ln \tau$$

$$Z = \ln\left[\tau\frac{\partial \Delta p_u(\tau)}{\partial t}\right]$$

Assim, os limites de integração passam a:

$$\tau = 0 \rightarrow\ t' = -\infty$$

$$\tau = t \rightarrow\ t' = \ln t$$

$$\Delta p(t) = \int_{-\infty}^{\ln t} q\ (t - e^{t'})\ e^{Z(e^{t'})}dt' \qquad \textbf{(4.17)}$$

Daqui por diante, podem ser feitas as mesmas manipulações para a consideração de histórico variando sob a forma de degraus, o que não é de interesse neste momento.

A equação (4.17) é adotada na totalidade dos artigos investigados para a realização deste trabalho. A principal vantagem de seu uso é a utilização de solvers irrestritos. No entanto, sua exposição aqui busca apenas enunciar a base para o estudo que será posteriormente apresentado. Esta monografia, por fins didáticos, adota como ponto de partida a fórmula dada pela equação (4.13).

4.3 Método dos mínimos quadrados (MMQ) sem e com regularização

4.3.1 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

O objetivo do MMQ é a transformação de um conjunto de medidas relacionadas em uma única curva de equação habitualmente simples que possa descrevê-las. Pode-se dizer que a curva resultante é a que melhor se ajusta ao conjunto de dados dos quais se dispõe.

Seja, por exemplo, o conjunto de pontos representados na curva em azul na Figura 4-6, com $y = f(x)$.

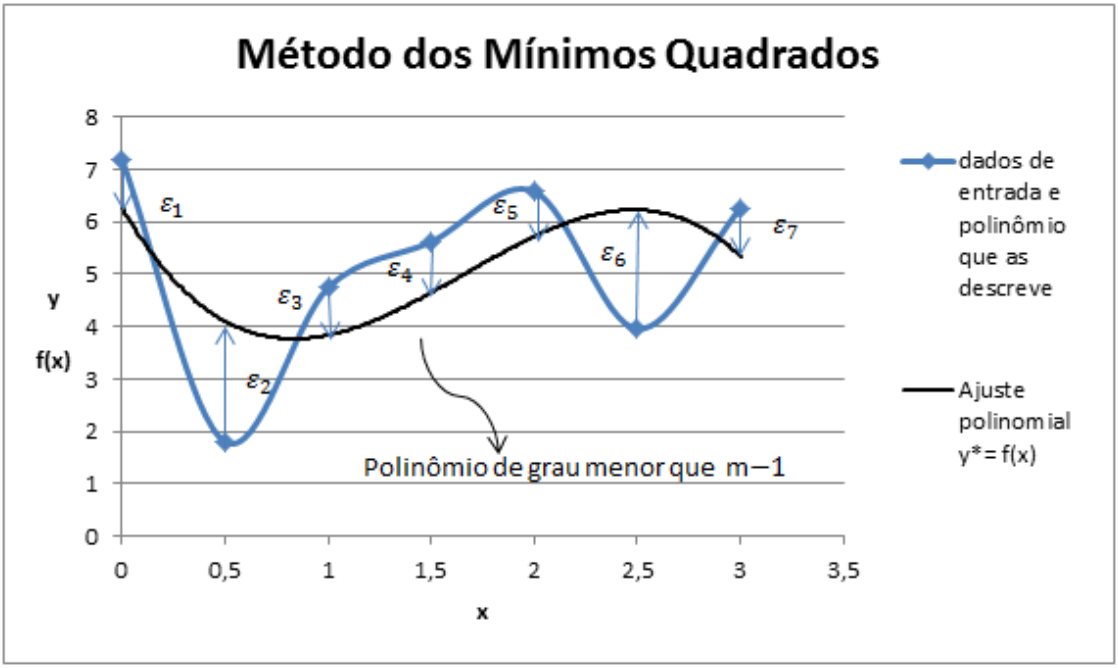

Figura 4-6 – Ajuste polinomial e erros envolvidos

Imaginando, por facilidade de exposição, que se queira associar seu comportamento a um polinômio do tipo:

$$y^*(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_p.x^p = \sum_{j=0}^{p} a_j\,.x^j \qquad \textbf{(4.18)}$$

onde:

- $y^*(x)$ representa a estimativa de y para um dado valor de x. É, portanto, o valor de y calculado através da curva.
- p é o grau do polinômio.
- $a_1, a_2 \ldots a_j$ são os coeficientes polinomiais que precisam ser escolhidos.

O método dos mínimos quadrados estabelece que esta escolha deve ser fundada na minimização do somatório dos erros quadráticos entre os $y^*(x)$, calculados, e os $y(x)$ medidos.

$$\varepsilon_j^2 = \left[{y_j}^*(x) - y_j(x)\right]^2 \qquad \textbf{(4.19)}$$

e

$$E = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^2 \qquad \textbf{(4.20)}$$

onde m, na expressão acima, é o número de pontos medidos que servem para o ajuste.

Aqui cabe uma observação. No exemplo da Figura 4-6, como $m = 7$, a curva que passa por todos esses pontos é descrita por um polinômio de 6º grau, representando o erro equivalente a zero. Assim, geralmente o ajuste polinomial serve para $p < m - 1$

O que se deseja resolver, então, é:

$$min_{a_j}\{E\} \qquad j = 1,2 \dots m \tag{4.21}$$

Para minimizar a função E, basta resolver o conjunto de $p+1$ equações fornecidas por:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \qquad \forall\, i = 0,1,2 \dots p \tag{4.22}$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{aligned} y_1^* &= a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_1^2 + \cdots + a_p.x_1^p \\ y_2^* &= a_0 + a_1.x_2 + a_2.x_2^2 + \cdots + a_p.x_2^p \\ &\vdots \\ y_m^* &= a_0 + a_1.x_m + a_2.x_m^2 + \cdots + a_p.x_m^p \end{aligned} \tag{4.23}$$

Então, o problema sintetizado na forma matricial por:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}\,\mathbf{a} \cong \mathbf{y} \tag{4.24}$$

em que **X** é uma função (matriz) que toma um vetor **a** e o transforma num vetor $\mathbf{y}^*$**,** representante dos valores calculados pela transformação. Ou:

$$\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^p \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^p \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Como, em geral, $m > p + 1$ e então o problema apresenta mais equações do que incógnitas. Por este motivo, pode-se assumir:

$$\mathbf{y}^* \cong \mathbf{y} \tag{4.26}$$

Portanto, o problema é $min_{a_j}\{\|\mathbf{y} - \mathbf{Xa}\|^2\}$. Este pode ser resolvido de forma direta ou iterativa.

Pela primeira forma, a solução é fechada e feita através do cálculo matricial:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X^T X})^{-1}\mathbf{X^T y} \tag{4.27}$$

Para mais detalhes, consultar o Apêndice 1.

Se, no entanto, o interesse for pela solução iterativa, como a adotada neste trabalho, pode-se recorrer a "solvers" baseados no método dos gradientes conjugados, como o fornecido pelo software Excel.

Suponha-se que se queira realizar um ajuste polinomial sobre os dados Tabela 4-3

Tabela 4-3 – Dados utilizados no exemplo

x	y
0	7,803
0,5	1,252
1	4,39
1,5	3,748
2	6,408
2,5	3,153
3	6,559
3,5	1,862

Seja, por simplicidade, p=2, ou seja, um ajuste de 2º grau.

$$y^*(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2$$

Obtêm-se, então:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5{,}153542 \\ -0{,}55482 \\ 0{,}048976 \end{bmatrix}$$

De outra forma, para solucionar o problema no Excel pela forma iterativa, pode-se multiplicar a matriz $\mathbf{X}$, montada a partir dos dados básicos do problema, pelo vetor $\mathbf{a}$, arbitrando para este último, valores quaisquer.

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

Fazendo-se a norma do vetor abaixo no espaço euclidiano, obtém-se o valor da função E, que representa o erro quadrático total:

$$E = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|_2^2, \qquad \textbf{(4.28)}$$

Utilizando o solver do Excel, pode-se definir E como função objetivo e selecionar as células variáveis como as do vetor **a.** Assim, é possível obter os coeficientes de **a** que minimizam o erro E.

A Figura 4-7 e a Figura 4-8 revelam os resultados obtidos de forma direta (curva vermelha) e de forma iterativa (curva verde) e atestam a confiabilidade da ferramenta do Excel.

É importante observar que, quanto maior o grau do ajuste, menor o erro obtido.

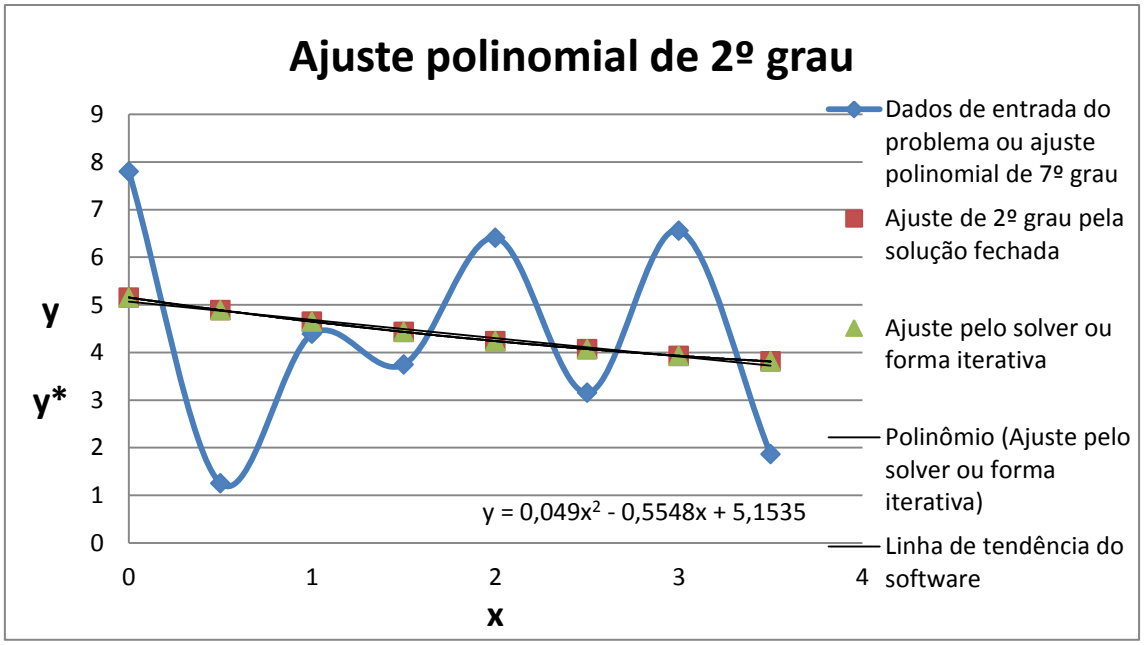

Figura 4-7 – Ajuste polinomial de 2º grau

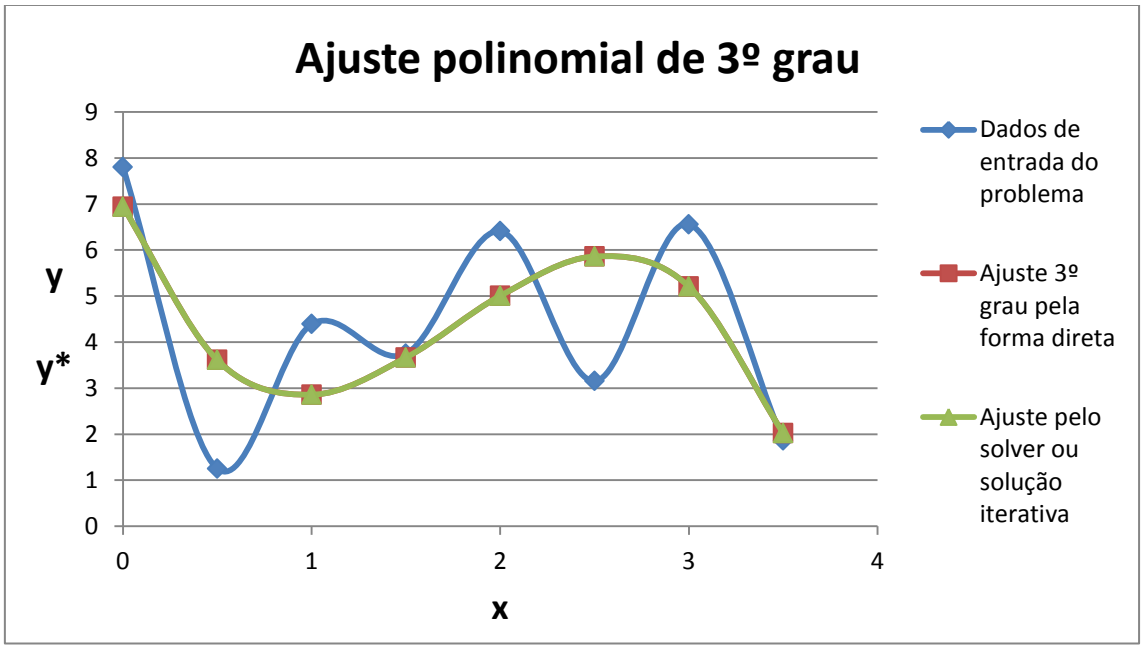

Figura 4-8 – Ajuste polinomial de 3º grau por cálculo matricial e pelo solver

4.3.2 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) com regularização

4.3.2.1 Total Least Squares (TLS)

Até agora consideramos o problema de minimização da função erro através da diferença entre $\mathbf{y}_{\boldsymbol{m}}$ e $\mathbf{y_c}$ elevada ao quadrado ($\boldsymbol{y_m}$ aqui representa o vetor correspondente aos valores medidos. No capítulo anterior m foi usado para o número de pontos medidos). No entanto, no caso dos testes de formação, como será formulado mais tarde, podem também ser contabilizados os erros no vetor $\mathbf{a}$, correspondente aos dados de vazão do problema. Assim, assume-se a minimização do erro através tanto da variável independente, como também da variável dependente.

Essa nova parcela de erro dá ao problema o nome de Total Least Squares[3]. Este será o método utilizado no problema implementado.

4.3.2.2 Reguladores de Tikhonov

Em alguns casos, por interesse associado ao conhecimento físico em consideração, pode ser que nem todas as soluções possíveis de $min_{a_j}\{E = \|\mathbf{y} - \mathbf{Xa}\|_2^2\}$ sejam convenientes e que seja interessante impor uma restrição ao problema. Isso é feito sabendo-se que as variações observadas em testes de formação são suaves. A existência de ruído tende a causa um aspecto oscilatório na forma da resposta.

Nestas circunstâncias, pode-se recorrer ao que, em literatura técnica, são conhecidos como regularizadores de Tikhonov.

Neste caso, o problema anteriormente posto pode ser apresentado por:

$$min_{a_j}\{E = \|\mathbf{y_m} - \mathbf{y_c}\|_2^2 + \|\mathbf{a_m} - \mathbf{a_c}\|_2^2\}, \qquad \textbf{(4.29)}$$

sujeito a $\|\mathbf{L}\,\mathbf{y_c}\| < \delta$, e onde $\mathbf{L}$ é um operador linear e δ, uma constante positiva.

[3] Título original do problema, em inglês, que o diferencia de um problema de Least Squares (LS), em que só uma parcela de erro é considerada.

Se de 1ª ordem, este operador $\mathbf{L}$ limita a soma de suas derivadas. Se de 2ª ordem, a soma de suas curvaturas.

Pode-se provar que resolver o problema dado por (4.29) é o mesmo que buscar uma solução para:

$$min_{a,\lambda}\{E = \|\mathbf{y_m} - \mathbf{y_c}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{L}\,\mathbf{y_c}\|_2^2 + \|\mathbf{a_m} - \mathbf{a_c}\|_2^2\} \qquad \textbf{(4.30)}$$

onde λ é um peso a escolha do usuário em função da suavidade almejada para a resposta (GOLUB *et al*., 1999).

Uma observação importante é que a norma aqui usada está no espaço euclidiano, sendo chamada de norma euclidiana, e pode ser calculada da seguinte forma:

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

O valor de λ depende da suavidade que se deseja para a curva de derivada de pressão.

O problema assim estabelecido, por considerar erros de medição tanto na pressão como na vazão, leva o nome de Total Least Squares (TLS). Além disso, a regularização aqui adotada é proposta, como dito, pelo método de Tikhonov.

5 Formulação e Implementação do Problema

5.1 Formulação do Problema

Nos artigos estudados, o cálculo de Δp é dado pela expressão (VON SCHRÖETER *et al*.)

$$\Delta p(t) = \int_{-\infty}^{\ln t} q(t - e^{\tau})\, e^{Z(\tau)} d\tau \qquad \textbf{(5.1)}$$

Este trabalho se utiliza de outra, muito mais difundida no âmbito da teoria da interpretação de testes de formação, a função de superposição:

$$\Delta p(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(q_j - q_{j-1}\right)[\Delta p_u(t - t_{j-1})] \qquad \textbf{(5.2)}$$

Matematicamente, (5.1) e (5.2) são equivalentes, conforme já mostrado na seção sobre Convolução e Deconvolução (Capítulo 4).

Qualquer que seja a escolha, o algoritmo irá partir de uma forma discreta de derivada de pressão que será integrada, superposta e comparada com as pressões medidas conforme o fluxograma apresentado na Figura 5-1.

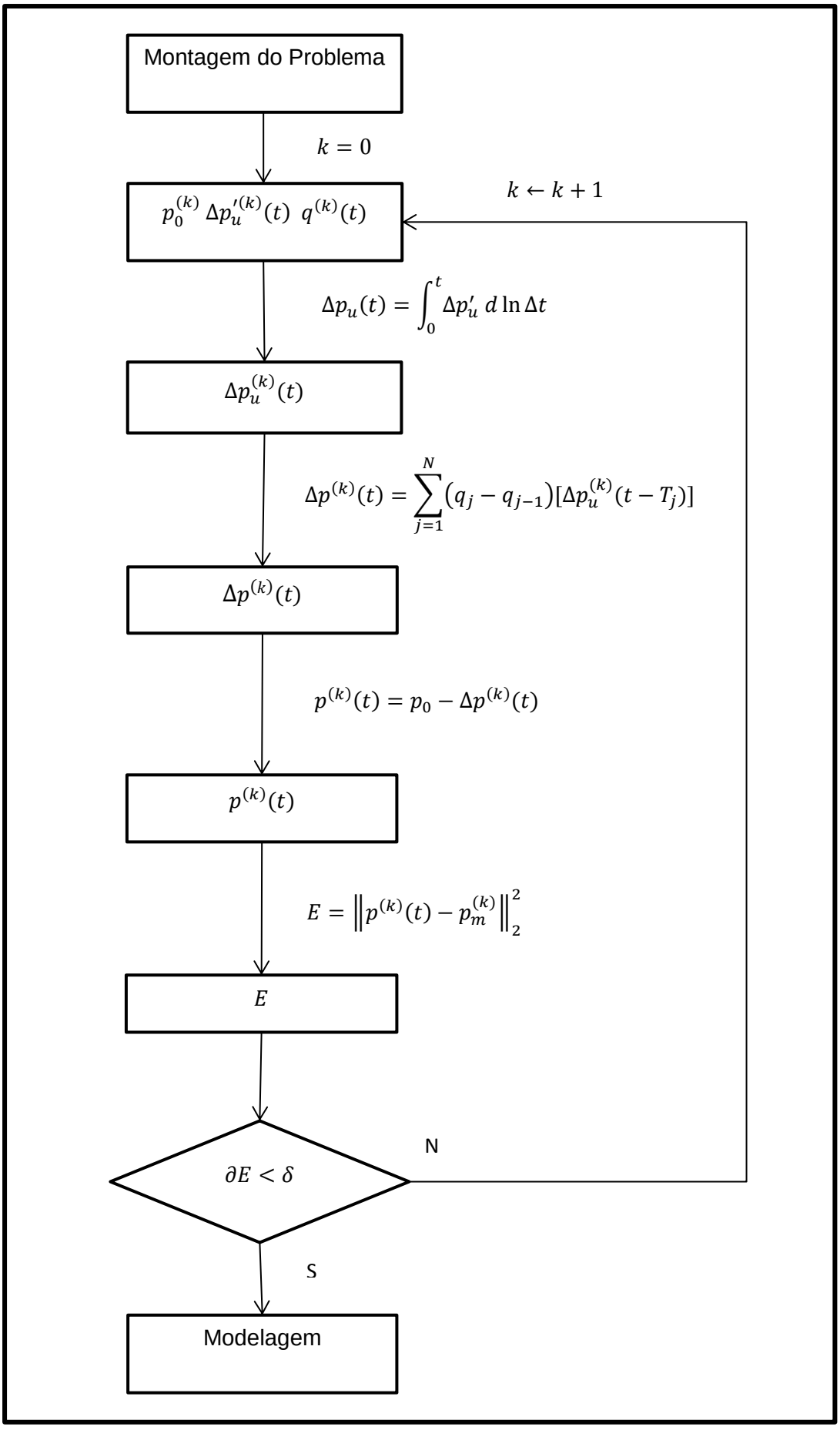

Figura 5-1 – Fluxograma do processo de deconvolução

As interpolações e integrações são executadas como se entre os pontos houvesse seguimentos lineares quando representados em um gráfico log x log.

O laço apresentado é resolvido iterativamente através do Solver do software Excel.

O produto final do processo é a forma da derivada de pressões que melhor representa os dados medidos. No nosso caso, parte dos dados de estática e, mais especificamente, os dados de pressão obtidos 1h após o início de tais períodos, já que o maior interesse é no comportamento de longo tempo.

Conforme será visto adiante, em virtude dos ruídos apresentados em dados reais e da própria natureza do problema, será preciso lançar mão de um regularizador.

Caso seja conveniente, a pressão inicial p_0 e o histórico de vazões também podem ser considerados imprecisos e entrar como variáveis a serem determinadas no processo de minimização de erros.

Seja um teste de formação composto por N períodos. Admite-se que a curva de $\Delta p'_u$ possui um formato qualquer e aparece representada por M pontos discretos

Se a forma de $\Delta p'_u(t)$ é conhecida, sua correspondente, $\Delta p_u(t)$, ainda que dependente de uma constante, também o é. Isso ocorre porque, por definição (BOURDET, 1989):

$$\Delta p'_u(t) \equiv \frac{d\Delta p_u(t)}{d \ln \Delta t} \qquad \textbf{(5.3)}$$

Então:

$$\Delta p_u(t) = \int_o^t \Delta p'_u(t)\, d \ln \Delta t \qquad \textbf{(5.4)}$$

Numericamente, considerando-se a Regra dos Trapézios, a expressão (5.4) equivale a:

$$\Delta p_u(t) = \Delta p_{u_0} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\left(\Delta p'_{u_{i-1}} + \Delta p'_{u_i}\right)\ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right) \qquad \textbf{(5.5)}$$

Com $1 \leq I \leq M$.

Portanto, arbitrando um valor para o Δp_{u_0} pode-se encontrar $\Delta p_u(t)$ a partir de $\Delta p'_u(t)$.

É importante observar que, como (5.5) representa um cálculo cumulativo, uma modificação em Δp_{u_0} conduz apenas a um traslado na curva de $\Delta p_u(t)$ no eixo das ordenadas.

Com $\Delta p_u(t)$ determinado, pode-se calcular $\Delta p(t)$ pela expressão (5.2).

Por simplicidade de exposição, pode-se utilizar como exemplo $N = 3$, ou seja, um teste com 3 períodos.

Assim, se o ponto que está sendo considerado pertence ao primeiro período, então:

$$\Delta p(T_0 \leq t \leq T_1) = (q_1 - q_0).\Delta p_u(t - T_0) \qquad \textbf{(5.6)}$$

Caso pertença ao segundo período:

$$\Delta p(T_1 \leq t \leq T_2) = (q_1 - q_0).\Delta p_u(t - T_0) + \ (q_2 - q_1).\Delta p_u(t - T_1) \qquad \textbf{(5.7)}$$

No caso do terceiro período:

$$\begin{aligned}\Delta p(T_2 \leq t \leq T_3) &= (q_1 - q_0).\Delta p_u(t - T_0) + \\ &+ (q_2 - q_1).\Delta p_u(t - T_1) + \ (q_3 - q_2).\Delta p_u(t - T_2)\end{aligned} \qquad \textbf{(5.8)}$$

Onde $T_0, T_1, T_2 \ldots T_{N-1}$ são o tempo de início de cada período.

E assim por diante. Bastando-se calcular as quantidades $t - T_0$, $t - T_1$ e $t - T_2$e também recuperar, por interpolação, os valores de $\Delta p_u(t)$ já calculados no passo anterior.

Deve-se também observar que podem ser necessários cálculos de mais de um ponto pertencente ao mesmo período. Isso é algo que geralmente ocorre.

Matematicamente, as 3 equações descritas podem ser apresentadas como:

$$\begin{bmatrix} \Delta p(T_0 \le t \le T_1) \\ \vdots \\ \Delta p(T_1 \le t \le T_2) \\ \vdots \\ \Delta p(T_2 \le t \le T_3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta p_u(t - T_0) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta p_u(t - T_0) & \Delta p_u(t - T_1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta p_u(t - T_0) & \Delta p_u\,(t - T_1) & \Delta p_u(t - T_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} (q_1 - q_0) \\ \vdots \\ (q_2 - q_1) \\ \vdots \\ (q_3 - q_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.9)}$$

O sistema representado por (5.9) pode ser escrito completamente na forma matricial. Assim:

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p_u} . \Delta \mathbf{q} \qquad \textbf{(5.10)}$$

O vetor $\Delta \mathbf{q}$ representa as variações de vazão impostas ao teste e matriz $\Delta \mathbf{p_u}$ é calculada em função de $\Delta p'_u(t)$.

Por definição, a queda de pressões vale:

$$\Delta p(t) = p_0 - p(t) \qquad \textbf{(5.11)}$$

Sendo p_0 a pressão inicial do sistema.

Da combinação de (5.10) e (5.11) pode-se obter:

$$\mathbf{p} = p_0.\mathbf{e} - \Delta\mathbf{p_u}.\Delta\mathbf{q} \qquad \textbf{(5.12)}$$

que representa o vetor de pressões calculadas e $\mathbf{e}$ é um vetor cujos componentes são unitários. Assim, $\mathbf{e^T} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots]$.

O que se busca a partir de agora é que o erro entre pressões calculadas e pressões medidas seja mínimo. Logo:

$$min_{\Delta p'_u(t),p_0}\{E = \|\mathbf{p} - \mathbf{p_m}\|_2^2\} \qquad \textbf{(5.13)}$$

Ou com (5.12) e (5.13):

$$min_{\Delta p'_u(t),p_0}\left\{E = \left\|p_0.\mathbf{e} - \Delta\mathbf{p_u}.\Delta\mathbf{q} - \mathbf{p_m}\right\|_2^2\right\} \qquad \textbf{(5.14)}$$

Caso seja empreendida a tarefa de resolver o problema dado por (5.14) será verificado que o produto do processo iterativo gerará uma resposta com muitas oscilações, particularmente com o uso de dados reais.

Sabendo que a derivada de pressões tem um aspecto suave, ou seja, sem grandes oscilações, VON SCHRÖETER *et al*. (2001, 2004) aplicaram ao problema a regularização de Tikhonov. Este foi um dos maiores méritos do trabalho e acabou conduzindo ao problema soluções robustas.

Assim, na prática, para que a derivada citada tenha um aspecto suave, característica da resposta gerada pela equação da difusividade, aplicou-se uma limitação à sua curvatura total.

Segundo VON SCHRÖETER *et al*., em uma das formas para se encontrar a curvatura total são considerados os ângulos entre as derivadas:

$$\varphi_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta t} \qquad \textbf{(5.15)}$$

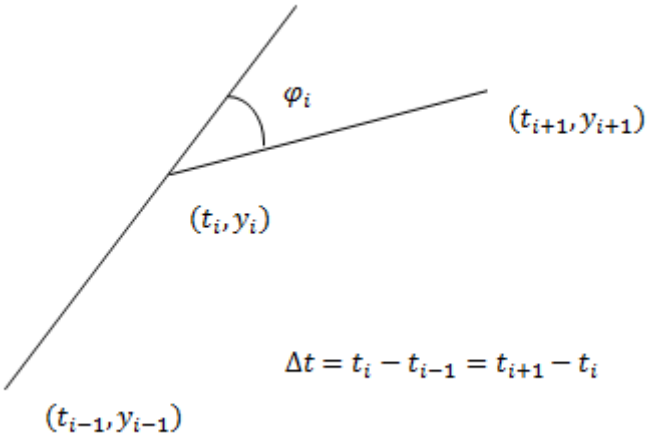

Figura 5-2 – Ângulo entre duas retas (GRINGARTEN *et al*., 2004)

A origem dessa expressão está indicada no Apêndice 2 e é válida para períodos de tempo igualmente espaçados numa escala logarítmica.

Como se pode observar pela equação (5.15) e como seria natural de se esperar, o cálculo da curvatura num determinado ponto depende do conhecimento dos pontos anterior e posterior. Assim, só é possível calculá-la a partir do ponto 2 ao ponto $M - 1$.

Com a regularização citada, a equação (5.14) se torna:

$$min_{\Delta p'_u(t), p_0, \lambda}\{E = \|p_0.\mathbf{e} - \Delta\mathbf{p_u}.\Delta\mathbf{q} - \mathbf{p_m}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{\varphi}\|_2^2\} \qquad \textbf{(5.16)}$$

Sendo λ um peso a ser atribuído. Seu estudo será apresentado no capítulo seguinte.

Cabe observar que, até aqui, as variáveis plausíveis para a minimização do erro foram: $\Delta p'_u(t), p_0$ e λ.

No caso de dúvidas em relação ao histórico de vazões, como de hábito, particularmente em testes longos, este também pode ser considerado na função erro.

Definindo-se $\mathbf{q_m}$ como o vetor de vazões medidas e $\mathbf{q}$ como o de vazões calculadas, atentendo-se a necessidade de se verificar a vazão, a expressão (5.16) pode ser escrita como:

$$nin_{\Delta\mathbf{p'_u},p_0,\lambda,\mathbf{q},\boldsymbol{\nu}}\left\{E = \|p_0.\mathbf{e} - \Delta\mathbf{p_u}.\Delta\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\boldsymbol{m}}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{\varphi}\|_2^2 + \nu\left\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\boldsymbol{m}}\right\|_2^2\right\} \quad \textbf{(5.17)}$$

onde ν é outro peso a ser atribuído.

Esta é a forma final estudada para a elaboração deste trabalho.

Deve-se notar aqui que o vetor $\Delta\mathbf{q}$ no primeiro termo da equação (5.17) deve corresponder às vazões calculadas. Isso significa que o histórico de vazões será alterado em cada iteração.

No capítulo seguinte, a partir da elaboração da forma final aqui explicitada, é apresentado um estudo dos pesos λ e ν e posteriormente, acompanhadas de algumas explicações.

5.2 Implementação do problema

Em posse do histórico de vazões e das pressões medidas do teste analisado, a implementação do algoritmo deste trabalho seguiu as etapas abaixo descritas:

1) Representação do gráfico de diagnóstico normalizado correspondente às estáticas do teste em análise. Procedeu-se como numa interpretação convencional.

1.1) Para cada t da estática, calcula-se a queda de pressão $\Delta p(t)$ através da seguinte expressão:

$$\Delta p_N(T_{N-1} < t \leq T_N) = p(t) - p(T_{N-1})$$

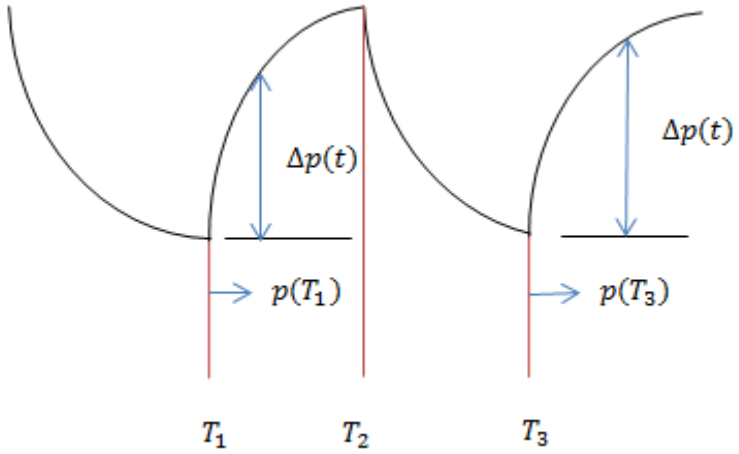

Figura 5-3 – Cálculo da variação de pressão no problema

1.2) Para cada t de estática, calcula-se a queda de pressão normalizada

$$\frac{\Delta p}{\Delta q_N}$$

onde:

$$\Delta q_N = q_{N-1} - q_N$$

1.3) Para cada t de estática, calcula-se a função de superposição:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N} (q_j - q_{j-1}) \ln\left(t - T_{j-1}\right)$$

1.4) Aplica-se a regra de diferenciação de dados discretos proposta por Bourdet para o cálculo da derivada de pressão normalizada

$$\frac{\Delta p'}{\Delta q} = \frac{d\Delta p}{dX}$$

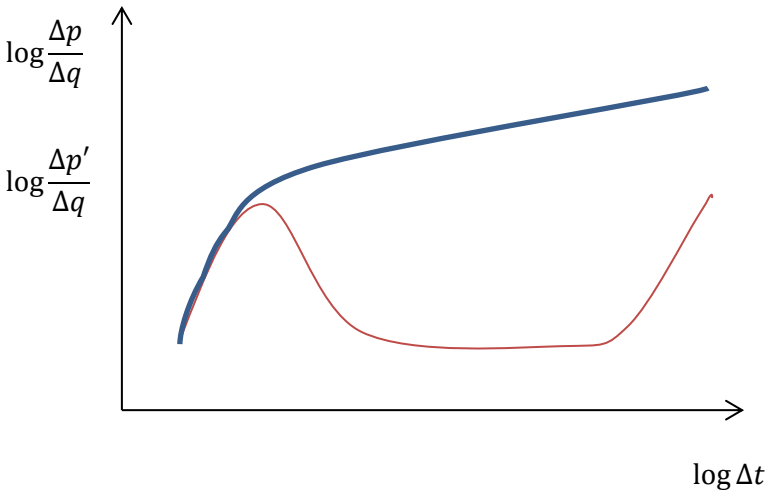

Figura 5-4 – Gráfico de diagnóstico

2) Adota-se de um formato inicial de derivada de pressão para o processo de deconvolução baseando-se, para isso, no formato inicial da estática mais representativa pelo processo de interpretação convencional.

2.1) Escolhe-se de I pontos de discretização da curva de derivada de pressão a ser utilizada no processo de deconvolução. No caso aqui implementado, $I = 25$.

2.2) Distribuição logarítmica uniforme dos I pontos.

$\Delta t_{min} = 0{,}001h$ (adotado)

$\Delta t_{máx}$ é o período de tempo compreendido entre o início do teste e o final da última estática considerada

$$\Delta t_i = 10^{\left[\log \Delta t_{min} + \frac{(I-1)}{(I+1)}(\log \Delta t_{max} - \log \Delta t_{min})\right]}$$

2.3) Cálculo da curva de Δp_u por integração da curva de $\Delta p'_u$ utilizando:

$$\Delta p_u(t) = \Delta p_{u_0} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\left(\Delta p'_{u_{i-1}} + \Delta p'_{u_i}\right)\ln\left(\frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}}\right)$$

A adoção de Δp_{u_0} foi feita de forma que a curva inicialmente considerada tivesse o mesmo aspecto das calculadas pelo método convencional nos tempos iniciais e então assumiu-se como forma inicial que o teste permaneceria em regime radial infinito a partir de $t = 1h$ (PIMONOV *et al*., 2010; HOUZÉ, 2010). Ver item 1.

A forma inicial está representada na Figura 5-5.

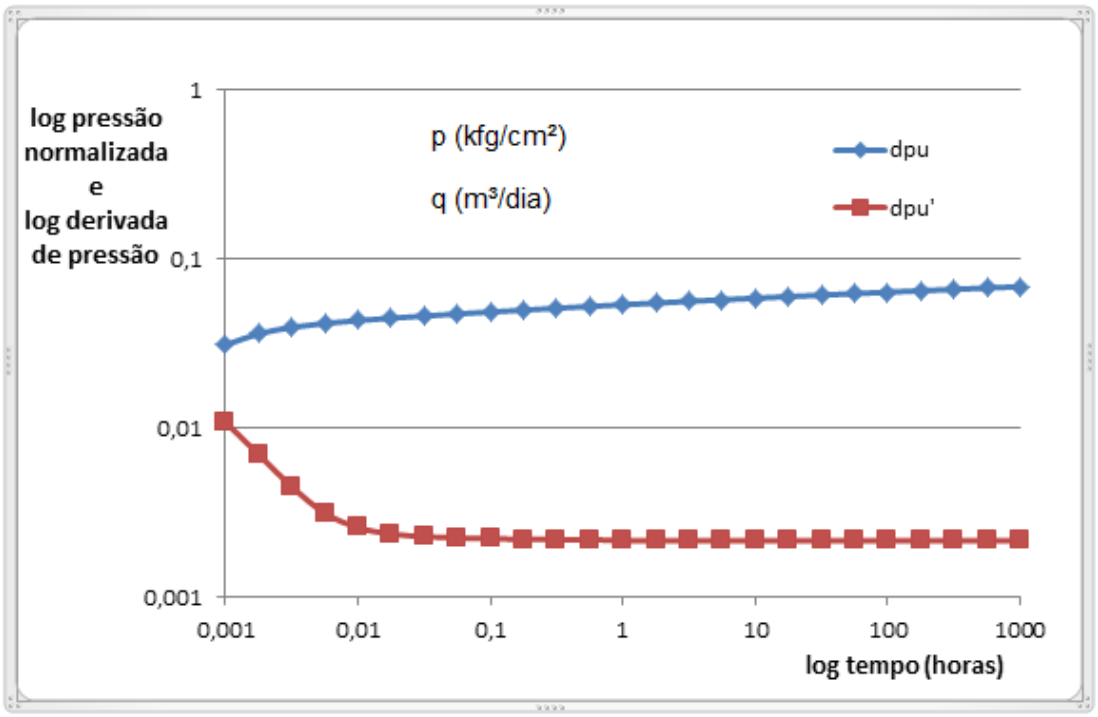

Figura 5-5 – Ponto de partida adotado para a derivada de pressão unitária

3) Cálculo dos N transientes de pressões ocorridos no teste a partir da forma de derivada dada pelo processo de deconvolução.

O cálculo de cada transiente (Tr_k) é dado por:

$$Tr_k(t) = 0, se\ t \leq Tr_{k-1}$$

$$Tr_k(t) = (q_k - q_{k-1})\ [\Delta p_u(t - Tr_{k-1})]$$

Onde $k = 1, 2, 3 \ldots N$ e N é o número de períodos.

Δp_u é calculado por interpolação log x log entre os pontos.

4) Acúmulo dos transientes e cálculo da queda de pressão por

$$\Delta p(t) = \sum_{k=1}^{N} Tr_k\,(t)$$

5) Cálculo de $p(t)$ por:

$$p(t) = p_0 - \Delta p(t)$$

Onde p_0 representa a pressão estática do reservatório e pode ser uma das variáveis no processo de minimização. De toda maneira, é interessante que $p(t)$ seja referencial a ela.

6) Cálculo do erro entre os dados medidos e calculados nos períodos de interesse, habitualmente estáticas, por:

$$\varepsilon_j^2 = [p_m(t) - p(t)]^2$$

7) Cálculo do erro total relativo aos dados de pressão por:

$$E_p = \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j^2$$

Onde M é o número de pontos envolvidos no processo de minimização.

8) Cálculo da curvatura acumulada dos dados de $\Delta p'_u$ por:

$$\varphi_i = \frac{\log \Delta p'_{u_{i-1}} - \log 2\ \Delta p'_{u_i} + \log \Delta p'_{u_{i+1}}}{\log(\frac{t_i}{t_{i-1}})}$$

Com $i = 2, 3 \ldots (I - 1)$.

9) Acúmulo do erro associado à curvatura:

$$E_k = \sum_{i=2}^{I-1} \varphi_i^2$$

10) Imposição do histórico calculado ao problema e cálculo do respectivo erro acumulado

$$E_q = \sum_{j=1}^{N} \left[q_{m_j}(t) - q_j(t) \right]^2$$

Caso a incerteza em relação aos dados de vazão seja incorporada ao problema, deve-se, aqui, referenciar os cálculos descritos no item 3 ao histórico de vazão calculado (e não ao medido).

11) Adota-se pesos para cada um dos termos do erro global do problema.

Assim, pode-se minimizar a função objetivo do problema, expressa por:

$$E = E_p + \lambda\, E_k + \nu\, E_q$$

Onde:

$$E_p = \|p_0.\mathbf{e} - \Delta\mathbf{p_u}.\Delta\mathbf{q} - \mathbf{p_m}\|_2^2$$

$$E_k = \|\varphi\|_2^2$$

$$E_k = \|\mathbf{q} - \mathbf{q_m}\|_2^2$$

λ e ν são pesos a serem avaliados. A escolha destes depende, fundamentalmente, da magnitude de cada parcela e do grau de importância que cada qual deva ter no processo iterativo de minimização global.

Vários critérios para tais pesos já foram estudados, inclusive através de análises estatísticas fundamentadas em ruídos pequenos e aleatórios. Porém, a que se mostrou mais satisfatória foi:

$$\lambda_{def} = \frac{\|\Delta\mathbf{p}\|_2^2}{M}$$

Onde:

$$\Delta p_j = \max\,(p_0, p_{max}) - p_j$$

Para $j = 1{,}2 \ldots M$, onde M é o número de pontos relacionados ao erro de pressões.

e:

$$\nu_{def} = \frac{\frac{\|\Delta\mathbf{p}\|_2^2}{M}}{\frac{\|\mathbf{q}\|_2^2}{N}}$$

Onde $\mathbf{q}$ é o vetor de vazões medidas e N é o número de períodos candidatos à modificação. Por assumirem vazão nula, as estáticas são excluídas dessa parte do processo.

Para facilitar o estudo desses pesos, neste trabalho ainda foram adotados:

$$\lambda = \lambda_{ad}\lambda_{def}$$

$$\nu = \nu_{ad}\nu_{def}$$

Onde λ_{ad} e ν_{ad} os valores de entrada para os pesos, escolhidos pelo implementador.

12) Calcula-se, iterativamente, a minimização do erro global (solver).

Assim, uma vez montado o problema, com λ e ν apropriados, espera-se que os cálculos efetuados sobre a curva de derivada de pressões permitam que esta deconvolva para bons ajustes local (estáticas, interpretação convencional) e global (carta de teste).

6 Estudos de caso

O estudo aqui proposto parte de dados simulados para um Teste de Formação a Poço Revestido (TFR) com 2 períodos de fluxo e 2 períodos de estática. Estes servem de referência como os dados medidos do problema (Tabela 6-1 e Tabela 6-2).

Tabela 6-1 – Dados sintéticos utilizados na implementação do problema

FLUXO 1			ESTÁTICA 1		
Tempo	**Vazão**	**Sim P**	**Tempo**	**Vazão**	**Sim P**
(horas)	**(m³/dia)**	**(kgf/cm²)**	**(horas)**	**(m³/dia)**	**(kgf/cm²)**
0,001	800	487,6382	450,001	0	453,8635
0,00172	800	483,8917	450,0016	0	457,1725
0,002959	800	481,4579	450,0025	0	459,4292
0,005089	800	479,8582	450,0039	0	460,9556
0,008754	800	478,6423	450,0061	0	462,0877
0,015057	800	477,5738	450,0095	0	463,042
0,0259	800	476,5646	450,015	0	463,9189
0,044551	800	475,5836	450,0235	0	464,7585
0,076631	800	474,618	450,0368	0	465,5773
0,131812	800	473,6613	450,0578	0	466,3835
0,226728	800	472,7097	450,0908	0	467,1816
0,389992	800	471,7613	450,1425	0	467,9743
0,67082	800	470,8148	450,2236	0	468,7631
1,15387	800	469,8693	450,351	0	469,5488
1,984757	800	468,9245	450,5509	0	470,3316
3,413955	800	467,9761	450,8647	0	471,111
5,872302	800	466,9847	451,3572	0	471,886
10,10087	800	465,8242	452,1303	0	472,6547
17,37438	800	464,3054	453,3437	0	473,4171
29,88546	800	462,2138	455,2483	0	474,1908
51,4056	800	459,3702	458,2377	0	475,0341
88,42213	800	455,7397	462,93	0	476,0371
152,0938	800	451,4363	470,295	0	477,2991
261,6146	800	446,6359	481,8551	0	478,9167
450	800	441,5017	500	0	480,9416

Tabela 6-2 - Dados sintéticos utilizados na implementação do problema

FLUXO 2			ESTÁTICA 2		
Tempo	**Vazão**	**Sim P**	**Tempo**	**Vazão**	**Sim P**
(horas)	**(m³/dia)**	**(kgf/cm²)**	**(horas)**	**(m³/dia)**	**(kgf/cm²)**
500,001	500	473,2156	900,001	0	465,0177
500,0017	500	470,8881	900,0016	0	467,1749
500,0029	500	469,3726	900,0026	0	468,6227
500,005	500	468,3753	900,0042	0	469,5915
500,0086	500	467,6188	900,0068	0	470,3143
500,0147	500	466,9557	900,011	0	470,9321
500,0251	500	466,3306	900,0178	0	471,5055
500,043	500	465,7241	900,0287	0	472,0577
500,0737	500	465,1286	900,0464	0	472,598
500,1261	500	464,5409	900,075	0	473,1313
500,2159	500	463,9602	900,1212	0	473,6602
500,3695	500	463,3878	900,1957	0	474,1862
500,6325	500	462,8272	900,3162	0	474,7104
501,0826	500	462,2855	900,5109	0	475,2331
501,853	500	461,7749	900,8254	0	475,7545
503,1717	500	461,3145	901,3335	0	476,2746
505,4288	500	460,9189	902,1544	0	476,7931
509,2924	500	460,5714	903,4807	0	477,3117
515,9054	500	460,2365	905,6234	0	477,848
527,2248	500	459,8824	909,0852	0	478,454
546,5997	500	459,4902	914,678	0	479,2057
579,7632	500	459,0731	923,7137	0	480,1885
636,528	500	458,6349	938,3119	0	481,4832
733,6904	500	458,0958	961,8966	0	483,1254
900	500	457,2915	1000	0	485,0772

Através desses dados pode-se resumir os dados do histórico de vazões e dos transientes gerados (Tabela 6-3).

Tabela 6-3 - Histórico de vazões

Períodos	T_i (horas)	q_m (m³/dia)	Transientes	Δq[4] (m³/dia)
Condição inícial		0		
fluxo 1	0	800	transiente 1	-800
estática 1	450	0	transiente 2	800
fluxo 2	500	500	transiente 3	-500
estática 2	900	0	transiente 4	500

Inicialmente procedeu-se como em uma interpretação convencional. Usou-se os dados das estáticas e calculou-se ΔP_N para o tempo decorrido desde o fechamento do poço.

Assim, foi possível achar a variação de pressão normalizada para cada estática e também sua derivada. Para a estática 1 (Tabela 6-4 e Figura 6-1):

[4] Respeitam-se as convenções delimitadas pela formulação apresentada no capítulo 8, tornando as estáticas positivas e os fluxos negativos.

Tabela 6-4 - Dados da estática 1

Δt	Δp	Δq	$\frac{\Delta p}{\Delta q}$	$X(t)$	$\frac{d\Delta p}{d\Delta X}$
0,001	12,361789	800	**0,015452236**	-10413,60407	
0,00157	15,670833	800	0,019588541	-10052,74459	0,007713711
0,002464	17,927515	800	0,022409394	-9692,177833	0,005246076
0,003867	19,453906	800	0,024317383	-9331,625954	0,003686264
0,00607	20,586077	800	0,025732596	-8970,926196	0,002892478
0,009527	21,540325	800	0,026925406	-8610,315328	0,002539003
0,014953	22,417273	800	0,028021591	-8249,699313	0,002379831
0,023471	23,256853	800	0,029071066	-7889,031521	0,002299163
0,03684	24,075659	800	0,030094574	-7528,400411	0,002252968
0,057825	24,881836	800	0,031102295	-7167,768116	0,002224355
0,090762	25,67993	800	0,032099913	-6807,171071	0,002205843
0,142461	26,472618	800	0,033090773	-6446,600891	0,002193223
0,223607	27,261427	800	0,034076784	-6086,087677	0,002183969
0,350974	28,047139	800	0,035058924	-5725,656283	0,002176222
0,550891	28,82991	800	0,036037388	-5365,351478	0,002168491
0,864682	29,609338	800	0,037011673	-5005,248579	0,002159257
1,357209	30,384338	800	0,037980423	-4645,462943	0,002146828
2,130282	31,153077	800	0,038941346	-4286,172806	0,002133018
3,343702	31,91544	800	0,0398943	-3927,657588	0,002145886
5,248291	32,689099	800	0,040861374	-3570,352372	0,0022693
8,237745	33,532444	800	0,041915555	-3214,929202	0,002610031
12,930007	34,535447	800	0,043169309	-2862,420109	0,003238254
20,295005	35,797477	800	0,044746846	-2514,388297	0,004188745
31,855145	37,415025	800	0,046768781	-2173,155706	0,005438529
50	39,439954	800	0,049299943	-1842,068074	

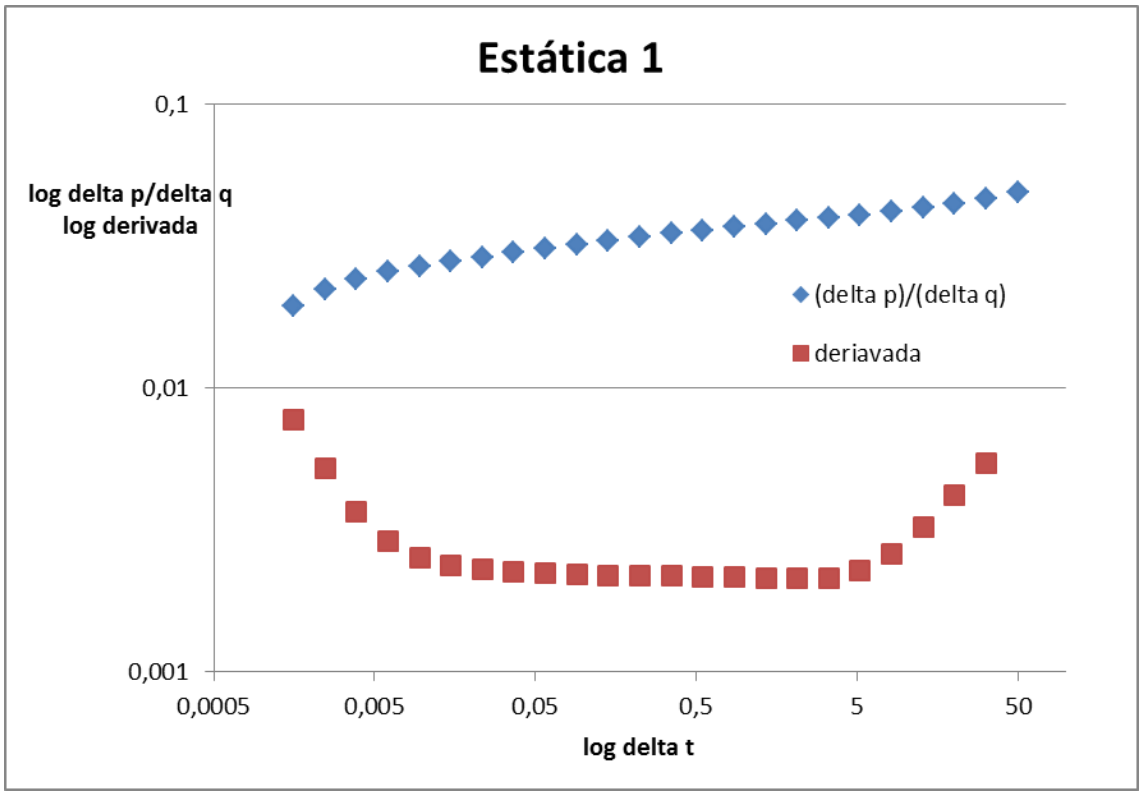

Figura 6-1 – Gráfico de diagnóstico da Estática 1

Para a estática 2 (Tabela 6-5 - Dados da estática 2 Figura 6-2):

Tabela 6-5 - Dados da estática 2

Δt	Δp	Δq	$\frac{\Delta p}{\Delta q}$	$X(t)$	$\frac{d\Delta p}{d\Delta X}$
0,001	7,726128	500	0,015452256	-7004,128019	
0,001616	9,883346	500	0,019766692	-6764,151261	0,007513889
0,00261	11,331172	500	0,022662344	-6524,453489	0,005039695
0,004217	12,299926	500	0,024599852	-6284,567193	0,003526067
0,006813	13,0228	500	0,0260456	-6044,713842	0,002794668
0,011007	13,640534	500	0,027281068	-5804,865915	0,002483179
0,017783	14,213983	500	0,028427966	-5565,012607	0,002346454
0,02873	14,766126	500	0,029532252	-5325,167096	0,002277488
0,046416	15,306472	500	0,030612944	-5085,322305	0,002238207
0,074989	15,839756	500	0,031679512	-4845,484018	0,00221434
0,121153	16,368642	500	0,032737284	-4605,644301	0,002199323
0,195734	16,894692	500	0,033789384	-4365,820039	0,002189541
0,316228	17,418821	500	0,034837642	-4126,010107	0,002182747
0,510897	17,94152	500	0,03588304	-3886,228125	0,002177492
0,825404	18,462974	500	0,036925948	-3646,489183	0,002172616
1,333521	18,98309	500	0,03796618	-3406,820017	0,002167228
2,154435	19,501566	500	0,039003132	-3167,263379	0,002165346
3,480701	20,020141	500	0,040040282	-2927,889103	0,002204929
5,623413	20,556502	500	0,041113004	-2688,808753	0,0023916
9,085176	21,162437	500	0,042324874	-2450,202082	0,00285045
14,677993	21,914126	500	0,043828252	-2212,358425	0,00365837
23,713737	22,896973	500	0,045793946	-1975,740994	0,004838553
38,311869	24,191714	500	0,048383428	-1741,087951	0,006310557
61,896582	25,833869	500	0,051667738	-1509,565489	0,007861871
100	27,785707	500	0,055571414	-1282,988557	

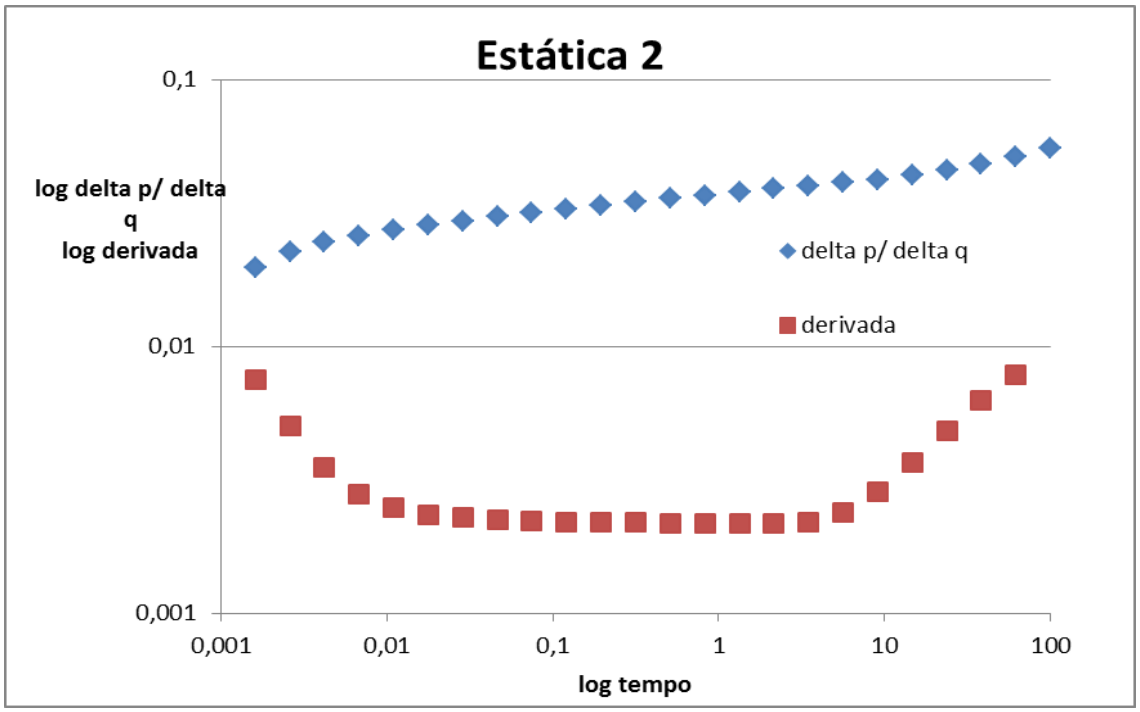

Figura 6-2 - Gráfico de diagnóstico da Estática 2

Olhando para as derivadas das duas estáticas conjuntamente, pode-se ver que as duas derivadas apresentam uma resposta muito próxima, evidenciando a mesma resposta do meio a dois estímulos diferentes (Figura 6-3).

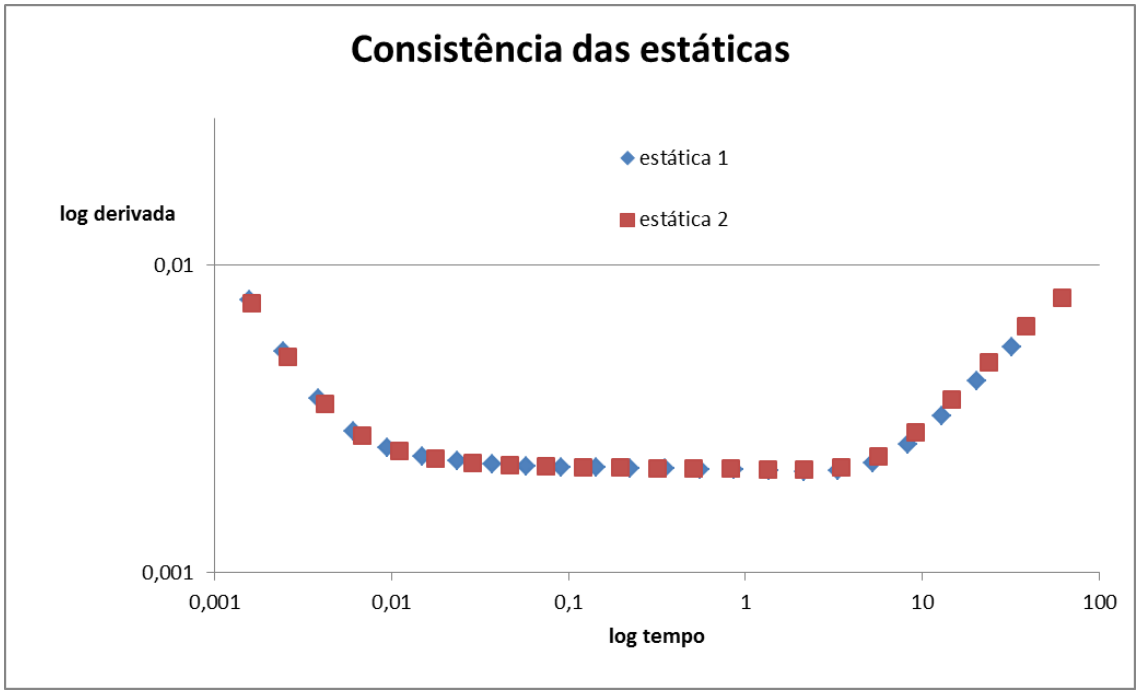

Figura 6-3 – Consistência das Estáticas

Pode-se então dar início à deconvolução. Isso pode ser feito com a escolha da curva de $\Delta p'_u$. Adotou-se a curva da estática 1 como referência e, aqui, particularmente, seu comportamento seguirá no mesmo patamar a partir de $t = 1h$ antes da deconvolução.

É de interesse, pela formulação elaborada, que se tenha intervalos de tempo uniformemente distribuídos em escala logarítmica. Assim, os dados seguem, para um teste de $1000h$:

$$t_{min} = 0{,}001h$$

$$t_{max} = 1000h$$

Assim, são obtidos os seguintes valores para a forma inicial adotada[5] (Tabela 6-6):

Tabela 6-6 - Dados discretos da derivada de pressão unitária

i	Δt_i	$\Delta p'_u$
1	0,001	0,010761
2	0,001778	0,006935
3	0,003162	0,004315
4	0,005623	0,003014
5	0,01	0,002521
6	0,017783	0,002348
7	0,031623	0,002269
8	0,056234	0,002226
9	0,1	0,002203
10	0,177828	0,002189
11	0,316228	0,002178
12	0,562341	0,002168
13	1	0,002155
14	1,778279	0,002155
15	3,162278	0,002155
16	5,623413	0,002155
17	10	0,002155
18	17,78279	0,002155
19	31,62278	0,002155
20	56,23413	0,002155

[5] dt e dp_u são diferenciais de tempo e de pressão (normalizada), respectivamente

21	100	0,002155
22	177,8279	0,002155
23	316,2278	0,002155
24	562,3413	0,002155
25	1000	0,002155

Pode-se então visualizar o formato inicial da curva. Sua alteração dependerá das variáveis e parâmetros envolvidos na minimização.

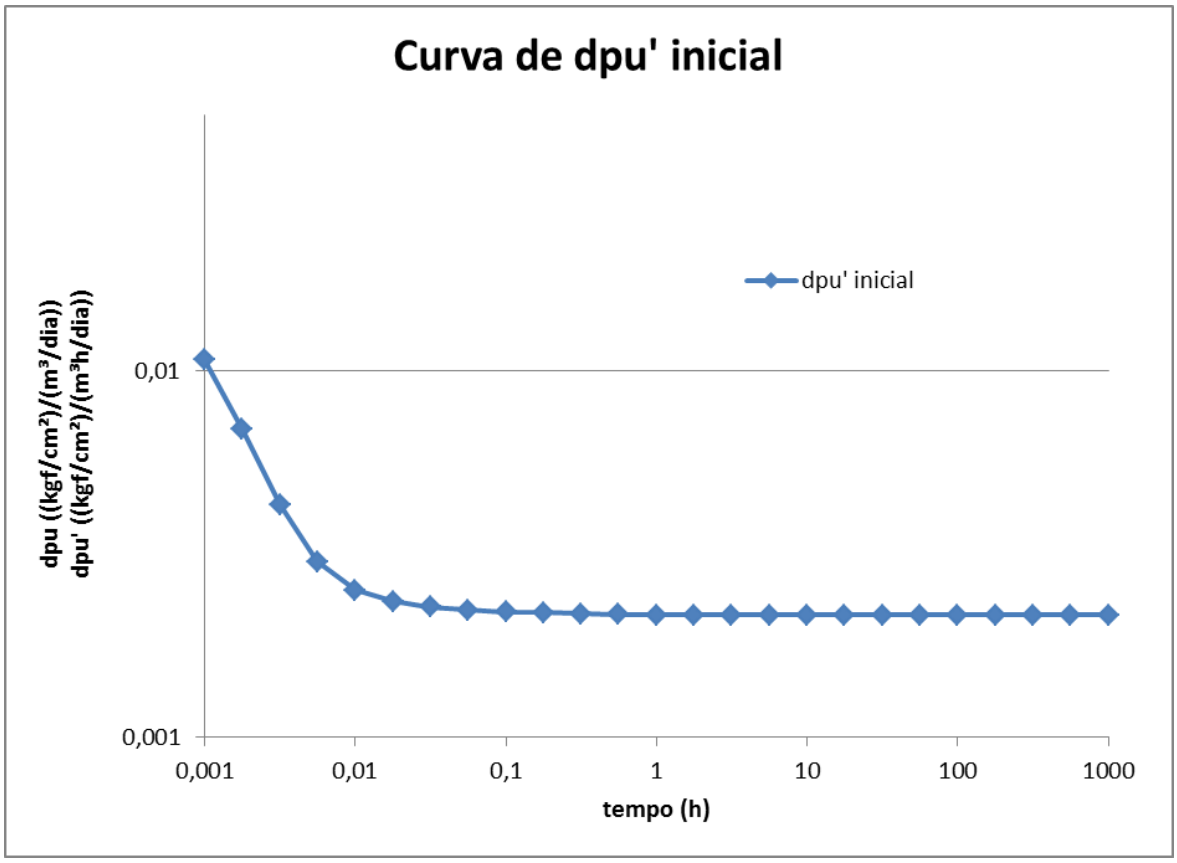

Figura 6-4 – Derivada de pressão unitária no início da implementação

Pela Regra dos Trapézios, integra-se os dados de $\Delta p'_u$ e achamos Δp_u (ou dp_u), conforme a Tabela 6-7.

Tabela 6-7 - Integração de dados discretos

Δt	$\Delta p'_u$	Δp_u
0,001	0,010761031	**0,03090447**
0,001778	0,006935001	0,03599641
0,003162	0,004315442	0,03923494
0,005623	0,003013959	0,04134456
0,01	0,002521395	0,04293797
0,017783	0,002348488	0,04433966
0,031623	0,00226851	0,04566853
0,056234	0,002226115	0,04696216
0,1	0,002203123	0,04823701
0,177828	0,002188666	0,04950107
0,316228	0,002178011	0,0507579
0,562341	0,002168068	0,0520088
1	0,002155241	0,05325315
1,778279	0,002155241	0,0544938
3,162278	0,002155241	0,05573446
5,623413	0,002155241	0,05697512
10	0,002155241	0,05821578
17,78279	0,002155241	0,05945643
31,62278	0,002155241	0,06069709
56,23413	0,002155241	0,06193775
100	0,002155241	0,0631784
177,8279	0,002155241	0,06441906
316,2278	0,002155241	0,06565972
562,3413	0,002155241	0,06690037
1000	0,002155241	0,06814103

O valor de dp_{u_0} é aqui adotado. No presente exemplo será duas vezes o valor medido para Δp_u para $t = 0{,}001h$ na estática 2. Esse valor, adotado inicialmente, não interfere no formato da curva que será resultado do problema. É apenas seguido o formato dado pela interpretação convencional, sendo o valor, lá obtido, deslocado por um fator igual 2. Poderia ser qualquer um outro. Aqui, é adotado:

$$dp_u(t = 0{,}001h) = 0{,}015452236 * 2$$

Agora, pode-se encontrar a variação de pressão através da expressão da superposição abaixo:

$$\mathbf{dp = dp_u\, dq}$$

Cabe lembrar que, numa estática de um teste convencional, enquanto a pressão no fundo sobre, a variação de vazão que entra na expressão da superposição é negativa (pois analisa-se uma estática, após um fluxo). Assim, os valores de pressão serão negativos por convenção aqui adotada.

Portanto, na estática, o efeito da pressão dado pelo transiente é inverso ao do fluxo, causando a diferença de sinal.

Tomando $t = 1000h$ (final do teste) como exemplo, pode-se ver que a queda de pressão terá a influência dos 4 transientes gerados até então, o que é explicado pela superposição dos efeitos. Isso é mostrado na Tabela 6-8 e na Tabela 6-9.

Tabela 6-8 – Cálculo dos Transientes

t	q	p_{medida}	Transiente 1	Transiente 2	Transiente 3	Transiente 4
1000	0	485,0772	a	b	c	d

Somando-se os transientes, temos a queda de pressão:

Tabela 6-9 – Cálculo da Superposição dos Transientes

Transiente 1	Transiente 2	Transiente 3	Transiente 4	SUPERPOSIÇÃO -> Δp
a	b	c	d	a+b+c+d

O próximo passo é calcular, a partir do diferencial de pressão, a estimativa para a pressão medida[6]:

$$p(t) = p_0 - \Delta p$$

Inicialmente será assumida uma pressão inicial $p_0 = 500\ kgf/cm^2$, mas esta será considerada valor desconhecido adiante.

[6] Assumiremos um valor escolhidos para a pressão inicial, que é maior antes do início do teste.

Agora é possível calcular a diferença entre a pressão calculada e a medida.

Parte-se, então, para a parcela de erro correspondente à pressão. Para isso, no entanto, optou-se, como dito, por usar os dados de estáticas a partir de $t = 1h$ após o início de cada um destes períodos.

Os valores usados de Δt são listados na Tabela 6-10 e na Tabela 6-11.

Tabela 6-10 - Parcela de erro devido à pressão na estática 1

Δt	ε^2
1,357209	327,6551
2,130282	327,8744
3,343702	328,3005
5,248291	328,1628
8,237745	325,3218
12,930007	316,597
20,295005	298,6649
31,855145	269,0037
50	227,6524

Tabela 6-11 - Parcela de erro devido à pressão na estática 2

Δt	ε^2
1,333521	268,358
2,154435	268,2945
3,480701	268,2271
5,623413	267,5679
9,085176	264,5469
14,677993	256,8103
23,713737	241,8736
38,311869	217,9609
61,896582	185,5283
100	147,8221

O intuito é minimizar o erro usando a maior quantidade de dados possíveis. Assim, somam-se todas as parcelas de ε^2 e acha-se E_p.

Agora, pode-se calcular a curvatura para a curva de dp'_u inicial. Esta será obtida em 23 pontos (Tabela 6-12).

Tabela 6-12 - Cálculo da curvatura

i	φ_i
2	-0,06087
3	0,200588
4	0,313651
5	0,186627
6	0,063236
7	0,027426
8	0,014741
9	0,0066
10	0,002961
11	0,000529
12	-0,00236
13	0,010311
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
22	0
23	0
24	0

Elevando-se cada termo ao quadrado e somando-se, chega-se a:

$$E_k = \sum_{i=2}^{24} \varphi_i^2$$

Cabe observar que a partir de $i = 14$ a curvatura é zero. Isso ocorre porque assume-se que a partir de $t = 1h$ a curva da derivada seguiria horizontalmente até o tempo final do teste. Assim, a curvatura é inicialmente zero.

Nesse momento, define-se um valor para λ que permite que se obtenha a parcela de erro referente à curvatura.

A parcela fixa desse peso é obtida através do vetor que respeita o cálculo descrito no capítulo anterior.

Agora, admitindo-se uma incerteza em relação às medições de vazão, pode-se incluí-la, como explicado, no processo de minimização. A vazão medida é dada pelo histórico apresentado. A calculada pode assumir valores arbitrários após as iterações.

Nesse caso, é necessário definir um valor para v_{adm}.

Como as três parcelas de erros já podem ser relacionadas ao erro total, pode-se preparar a iteração para a minimização do erro total E.

Algumas possibilidades serão agora estudadas com base nas seguintes possíveis variáveis do problema:

- $dp'_u(t > 1h)$: valores da derivada de pressão unitária para tempos maiores que 1h.
- q, ou mais especificamente, a vazão durante os períodos de fluxo.
- p_o: pressão inicial
- λ_{adm}
- v_{adm}

Além disso, restringem-se os dados da derivada de pressão que entram na iteração a valores maiores ou iguais a 0,00001, ou seja,

$$dp'_u\ (\Delta t > 1h) \geq 0{,}00001$$

O problema inicialmente estabelecido pode ser melhor visto graficamente na Figura 6-5 e na Figura 6-6.

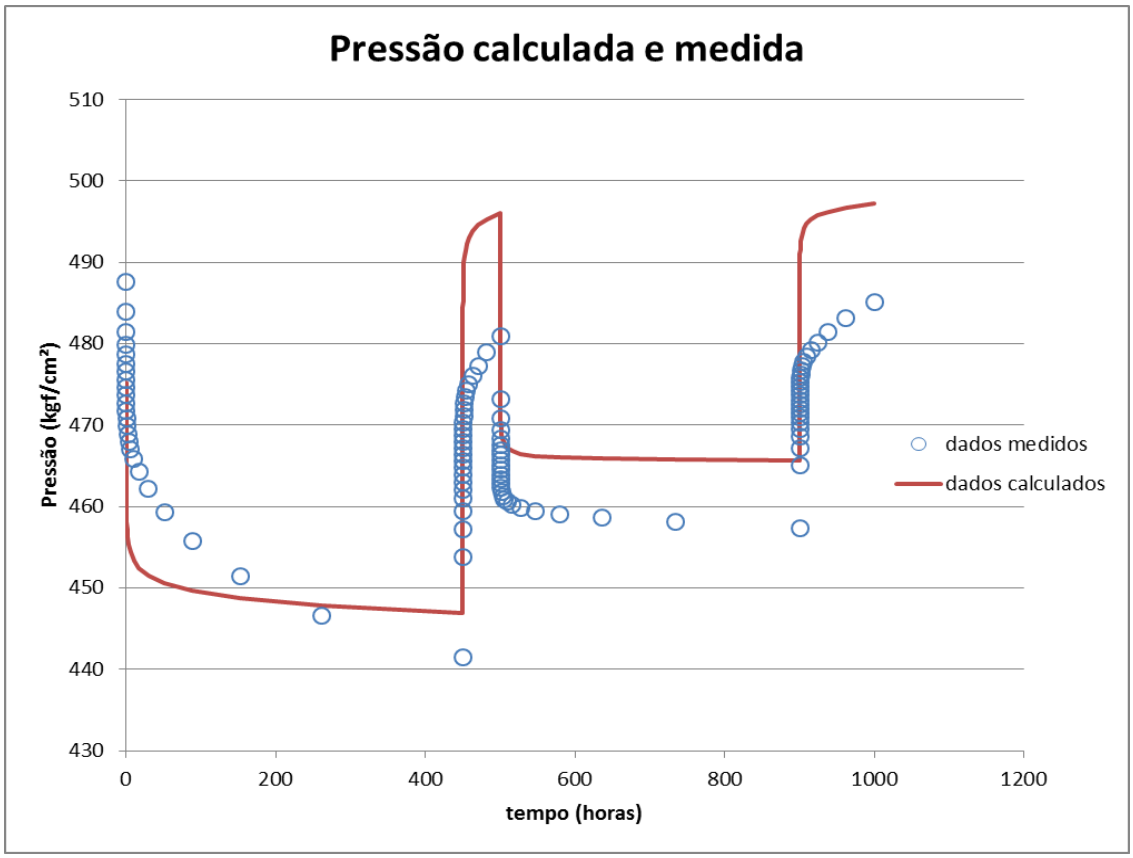

Figura 6-5 - Pressão medida e calculada

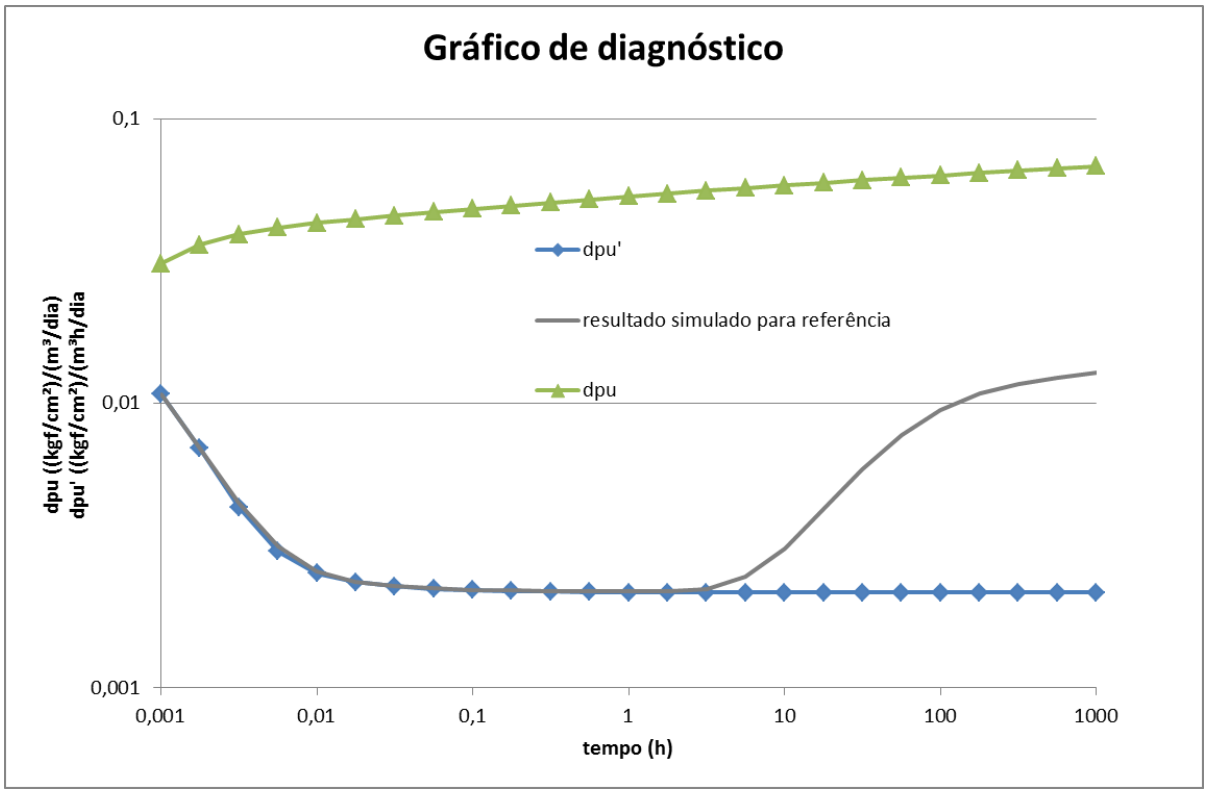

Figura 6-6 – Gráfico de Diagnóstico antes de qualquer iteração

6.1 Resposta de referência

A resposta de referência foi simulada através de um programa comercial (Pan System) através da consideração de um histórico de vazão unitário (vazão constante) por $1000h$.

Em todos os gráficos de diagnóstico (log x log) a seguir ela está representada pela curva cinza (Figura 6-7).

O resultado esperado é que as pressões, predominantemente nas estáticas, ao final do processo, estejam ajustadas aos dados medidos (Figura 6-5) e que a curva de derivada de pressão se aproxime da resposta de referência (Figura 6-6).

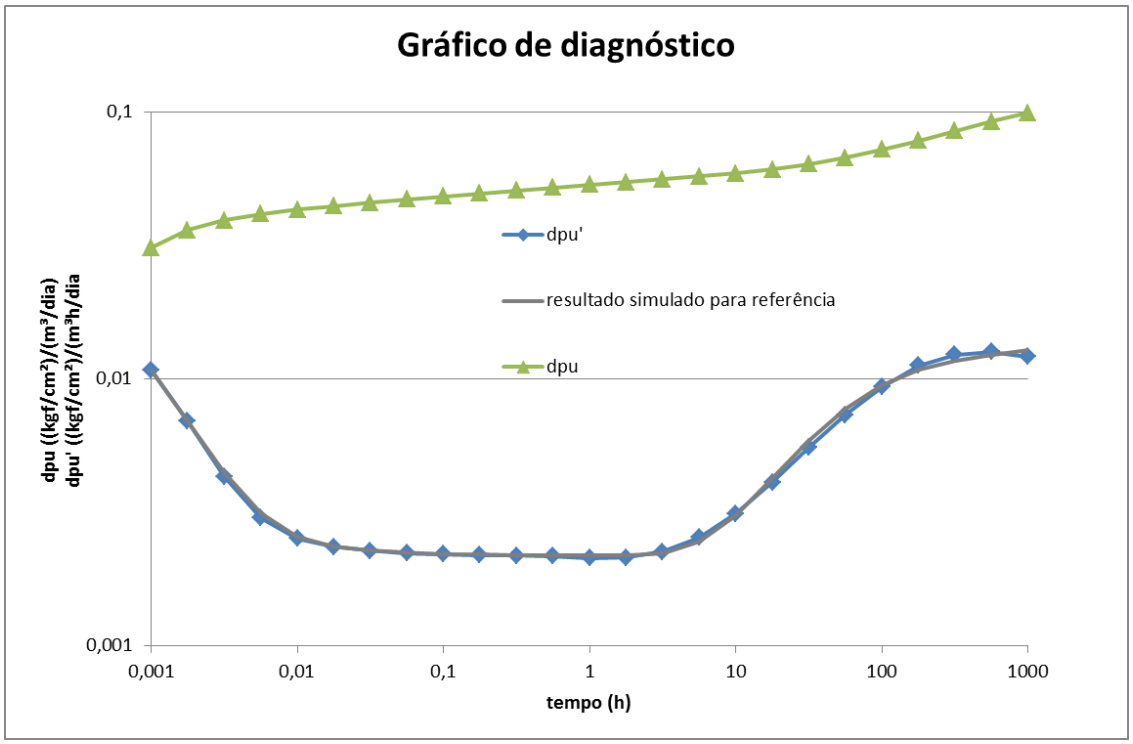

Figura 6-7 – Gráfico de diagnóstico

6.2 Estudo de λ sem atribuir incerteza às medições da pressão estática inicial e da vazão

Num momento inicial, assume-se que a pressão estática inicial e o histórico de vazões são conhecidos e foram medidos com alguma precisão. Assim, pode-se estudar λ apenas assumindo unicamente a forma da derivada (para $t > 1h$) como variável.

Para $\lambda = 1$, o resultado está na Figura 6-8:

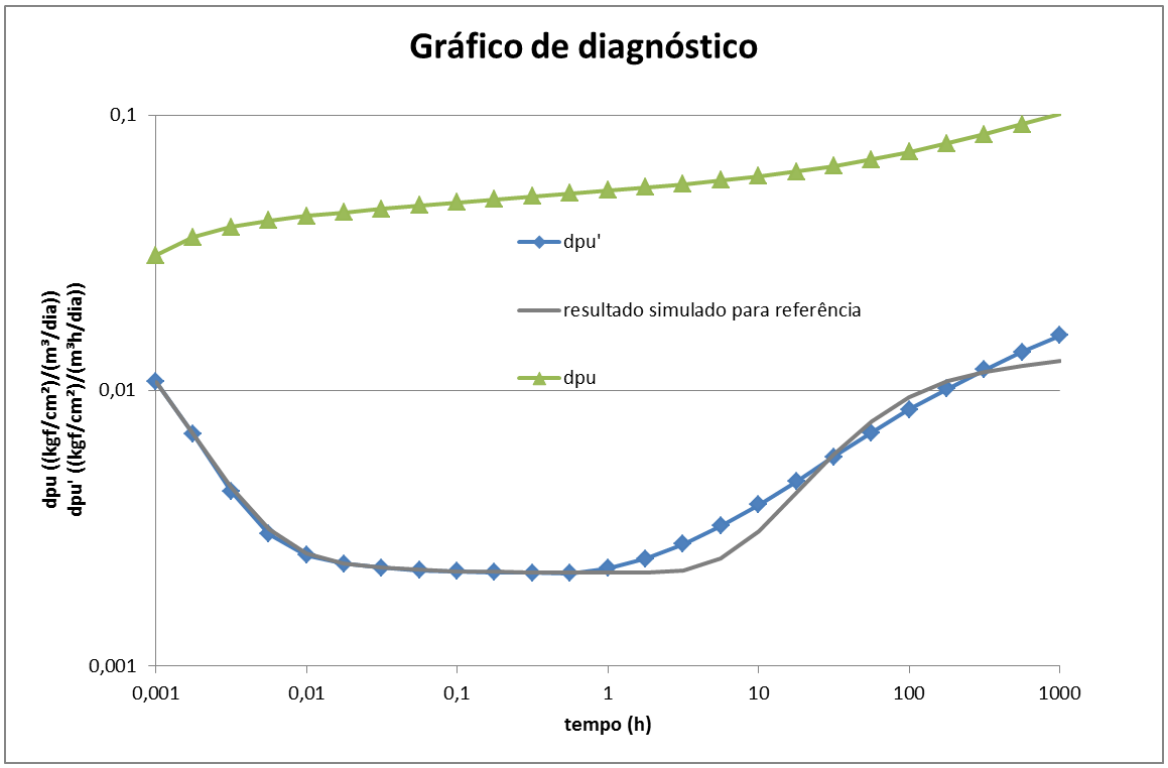

Figura 6-8 – Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 1$

Para $\lambda = 10$ (Figura 6-9):

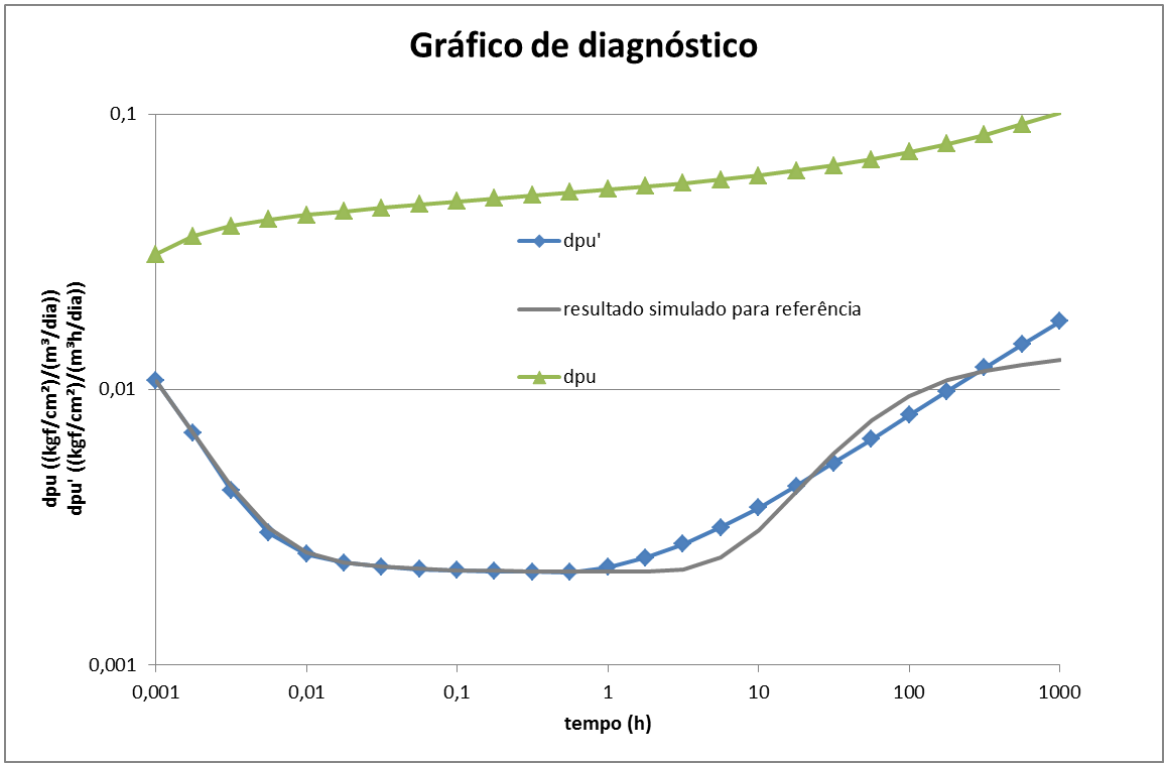

Figura 6-9 - Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 10$

Para $\lambda = 0{,}1$ (Figura 6-10)

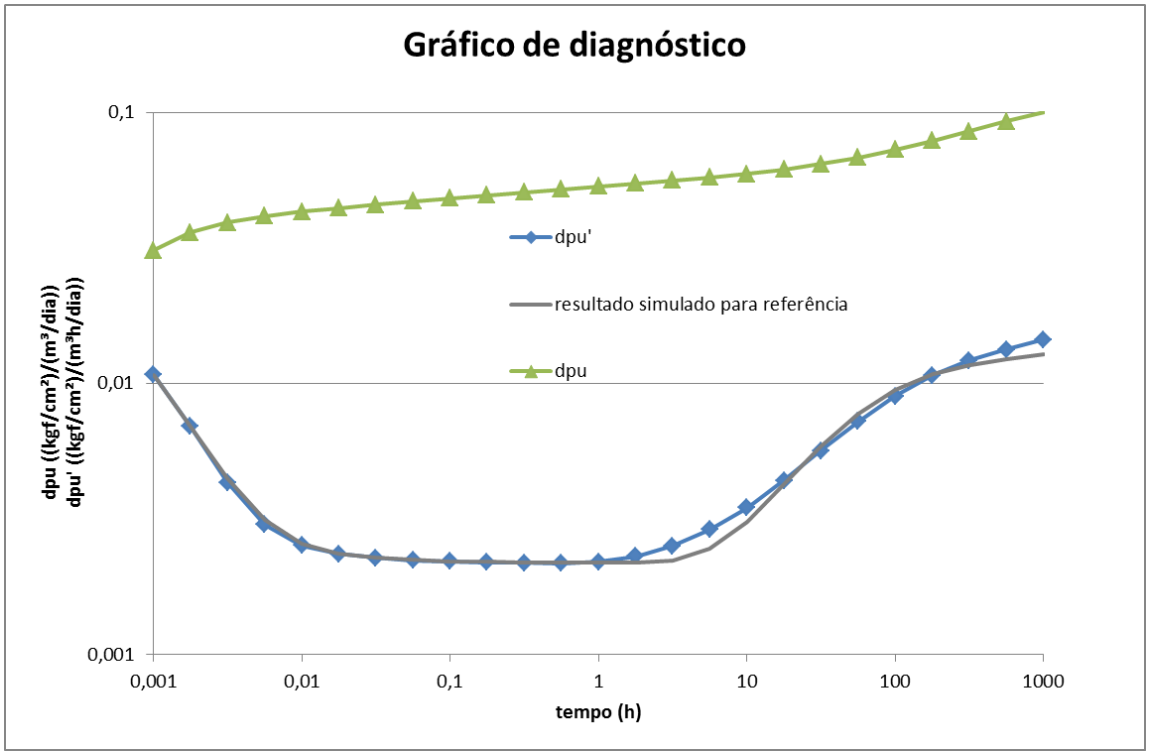

Figura 6-10 - Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 0,1$

Como a solução se aproximou mais da curva de referência, parece interessante testar $\lambda = 0{,}01$. Pode-se ver o resultado na Figura 6-11:

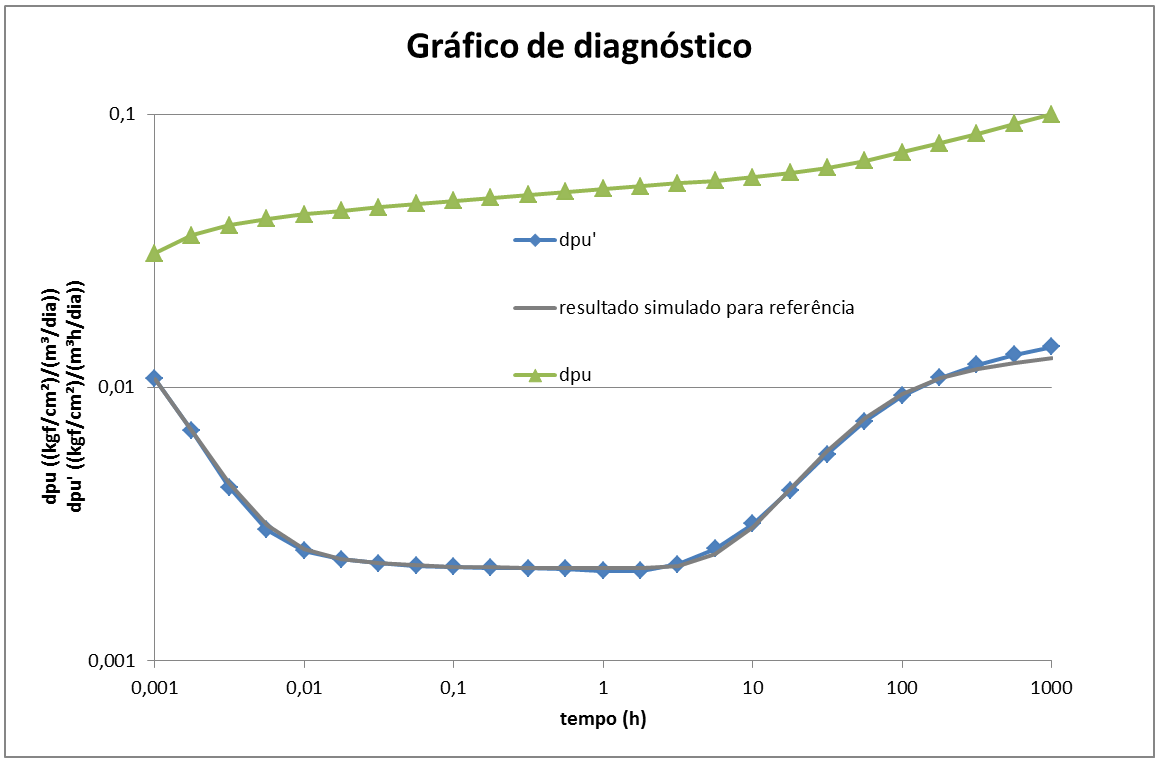

Figura 6-11 - Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 0,01$

Para $\lambda = 0{,}001$ (Figura 6-12):

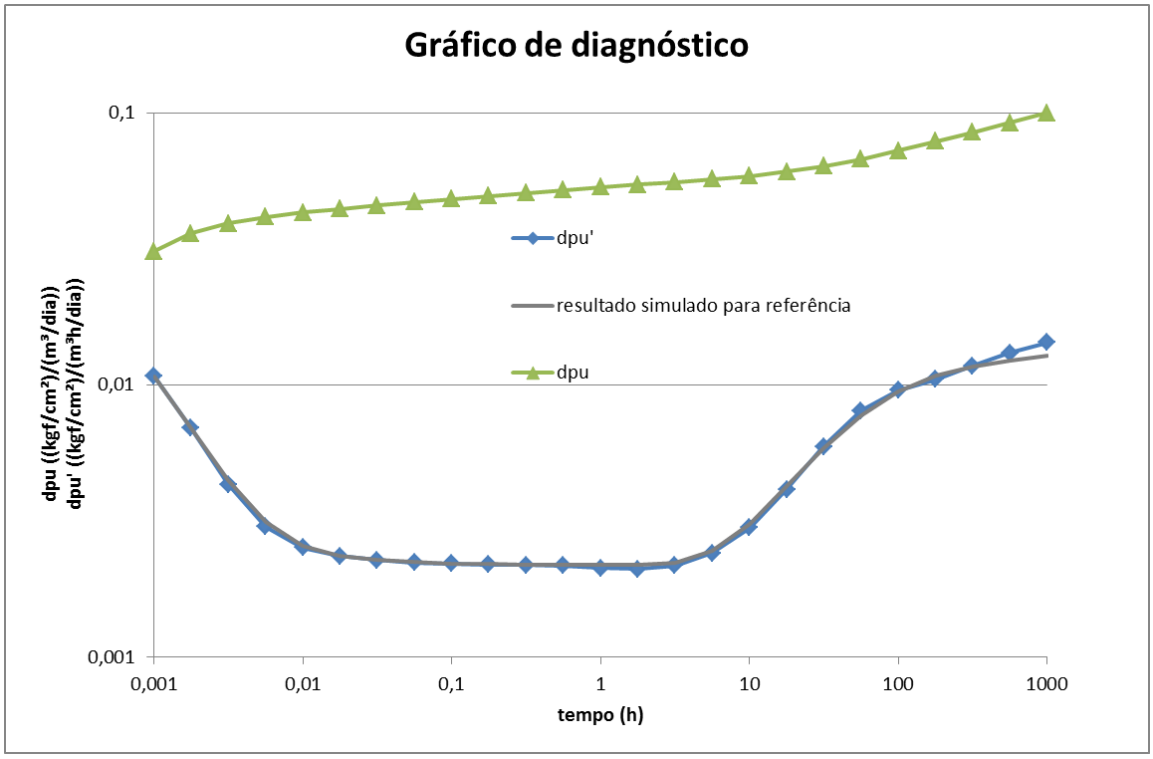

Figura 6-12 - Gráfico de diagnóstico para $\lambda = 0,001$

Percebe-se que a resposta se aproxima mais do esperando quando λ_{adm} ganha casas decimais.

6.3 Estudo de λ atribuindo assumindo incerteza em p_0

Agora, pode-se assumir que o histórico de vazões foi medido com alguma eficiência e que há alguma incerteza na medição pressão estática inicial. Esta, assim, se torna variável do problema.

Atribuindo-se um valor incerto de $p_0 = 495\ kgf/cm^2$, pode-se iniciar a iteração.

Para $\lambda = 0{,}001$, o valor é corrigido para $p_0 = 502\ kgf/cm^2$ (Figura 6-13).

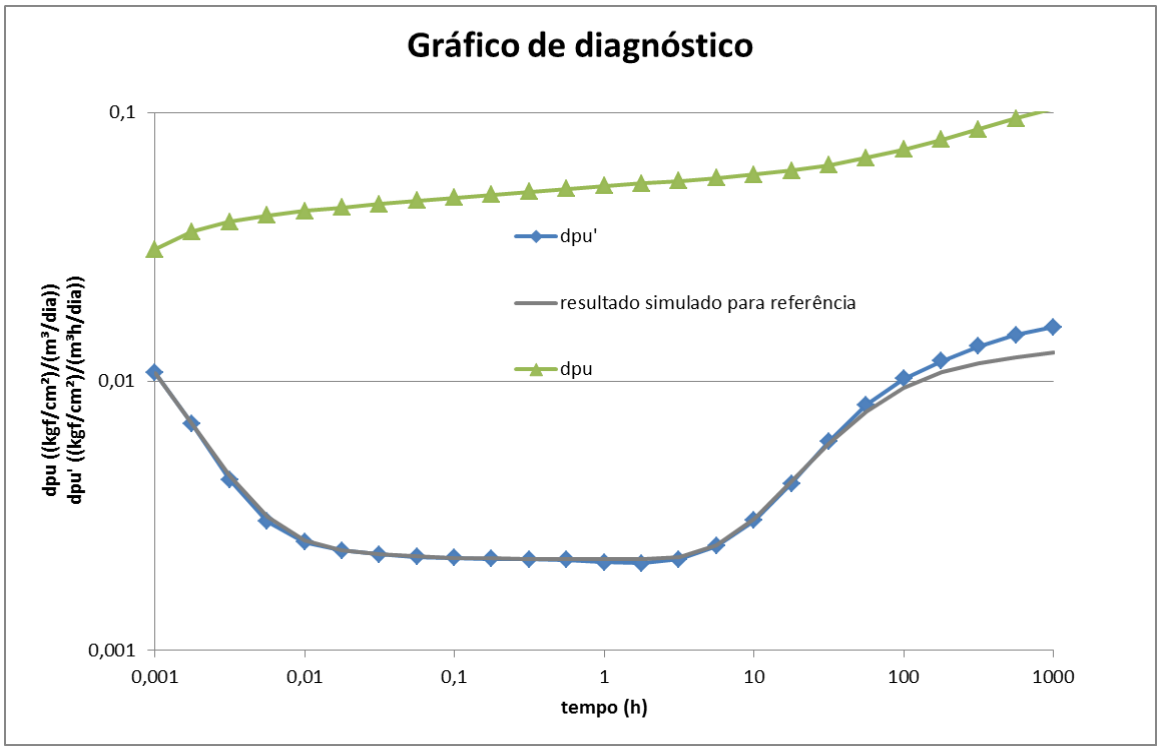

Figura 6-13 – Gráfico de diagnóstico para incerteza em p_0 e $\lambda = 0{,}001$

Para $\lambda = 0{,}01$, a curva se afasta mais do comportamento de referência (Figura 6-14).

Para $\lambda = 1$, ainda mais (Figura 6-15):

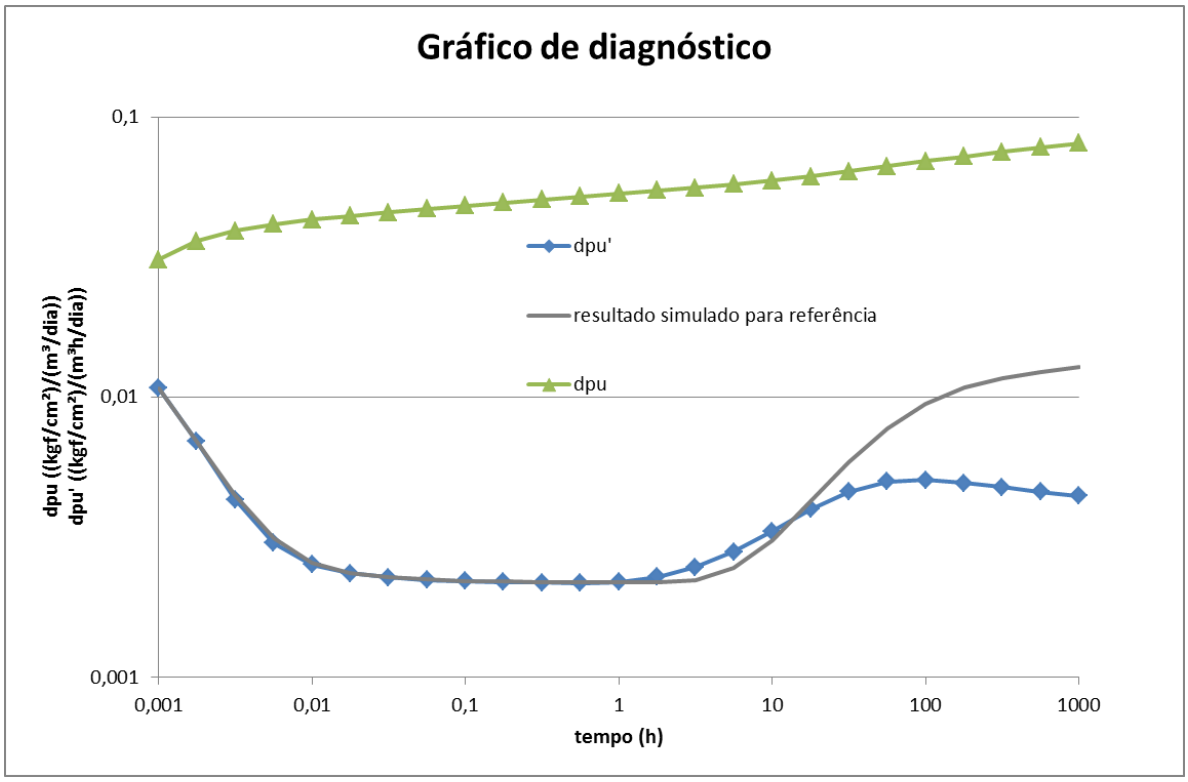

Figura 6-14 - Gráfico de diagnóstico para incerteza em p_0 e $\lambda = 0{,}01$

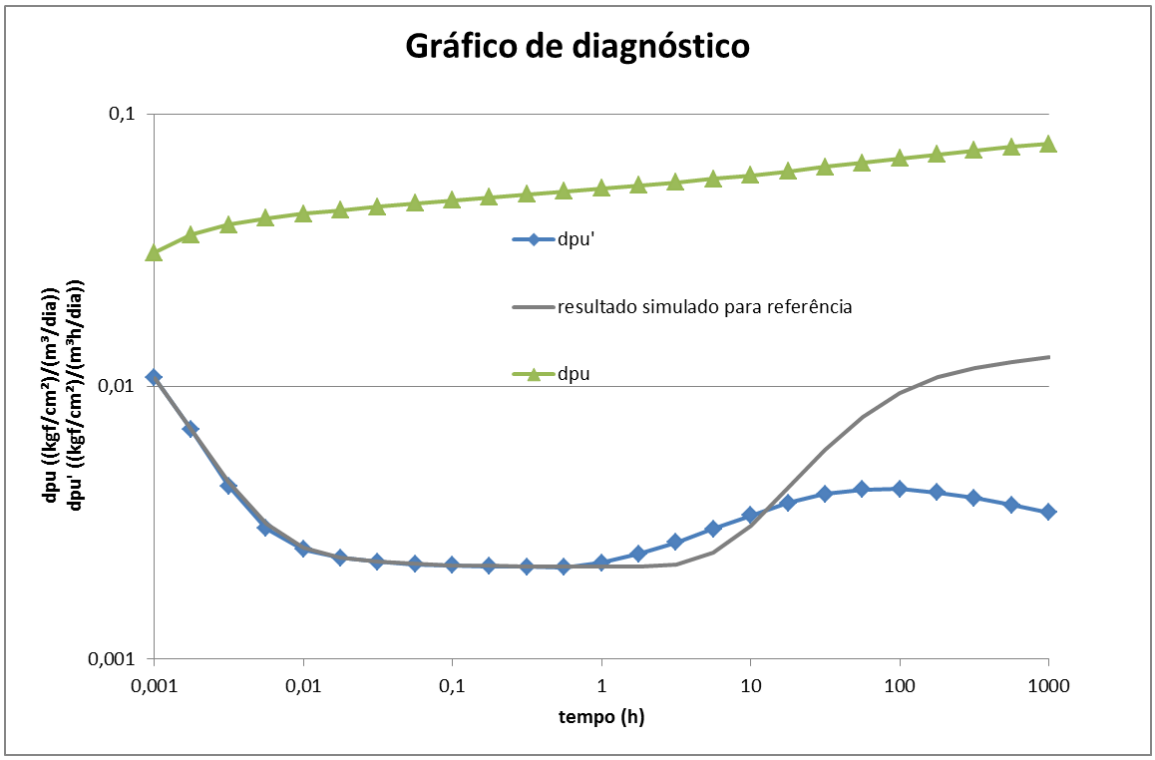

Figura 6-15 - Gráfico de diagnóstico para incerteza em p_0 e $\lambda = 1$

6.4 Estudo de ν assumindo incerteza na medição da vazão

Neste momento, assume-se que p_0 é conhecida. As variáveis são: a forma da derivada, o valor de ν e o histórico de vazões $q(t)$.

Para o histórico de vazões, assume-se um erro na medição no 2º fluxo de:

$$q = 480\ m^3/dia \text{ (para um valor correto de } 500\ m^3/dia)$$

O 1º fluxo continua com o mesmo valor: $q = 800\ m^3/dia$

É importante levar em conta que a razão correta entre os dois fluxos para os valores medidos é de:

$$q_1/q_3 = 800/500 = 1{,}6$$

A razão dos valores calculados deve se aproximar desta para que o histórico seja corrigido pelo problema.

Assume-se também o melhor valor provado até então para λ. Assim:

$$\lambda = 0{,}001.$$

Para $\nu = 0{,}001$, encontra-se (Figura 6-16):

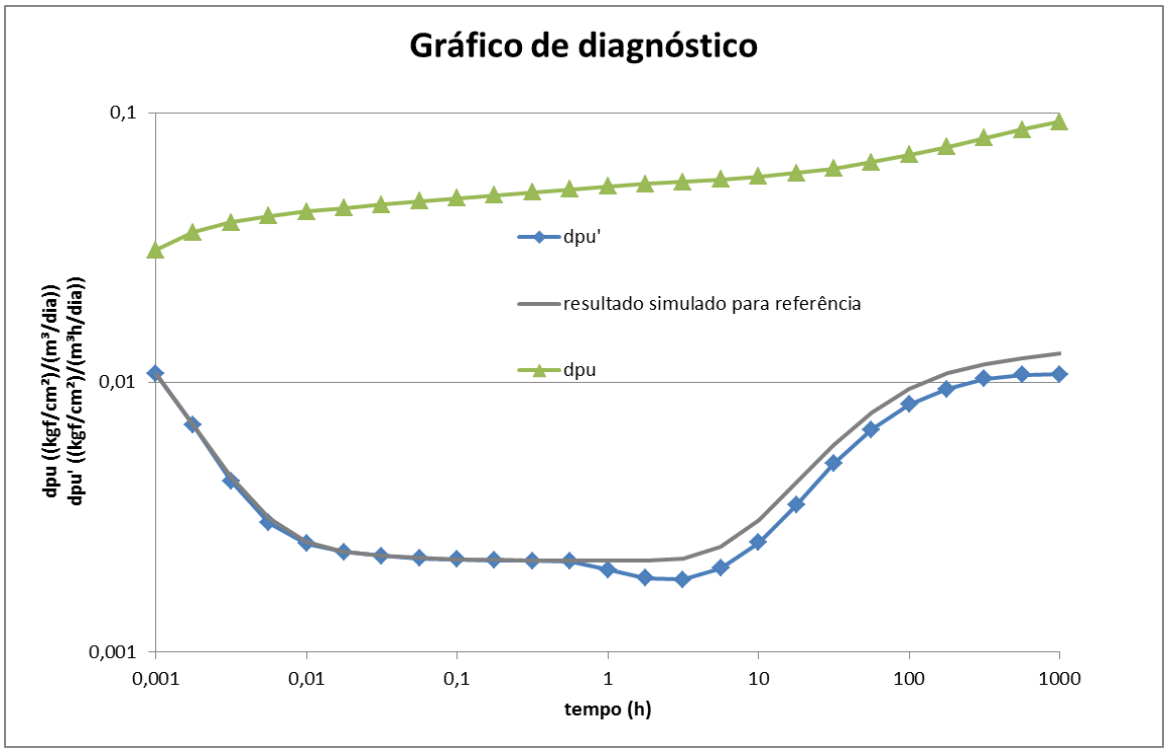

Figura 6-16 – Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão, $\lambda = 0{,}001$ **e** $\nu = 0{,}001$

A curva resultante segue o formato da de referência, mas não a sobrepõe.

Para $\nu = 0{,}01$, a resposta se aproxima bastante da curva de referência (Figura 6-17):

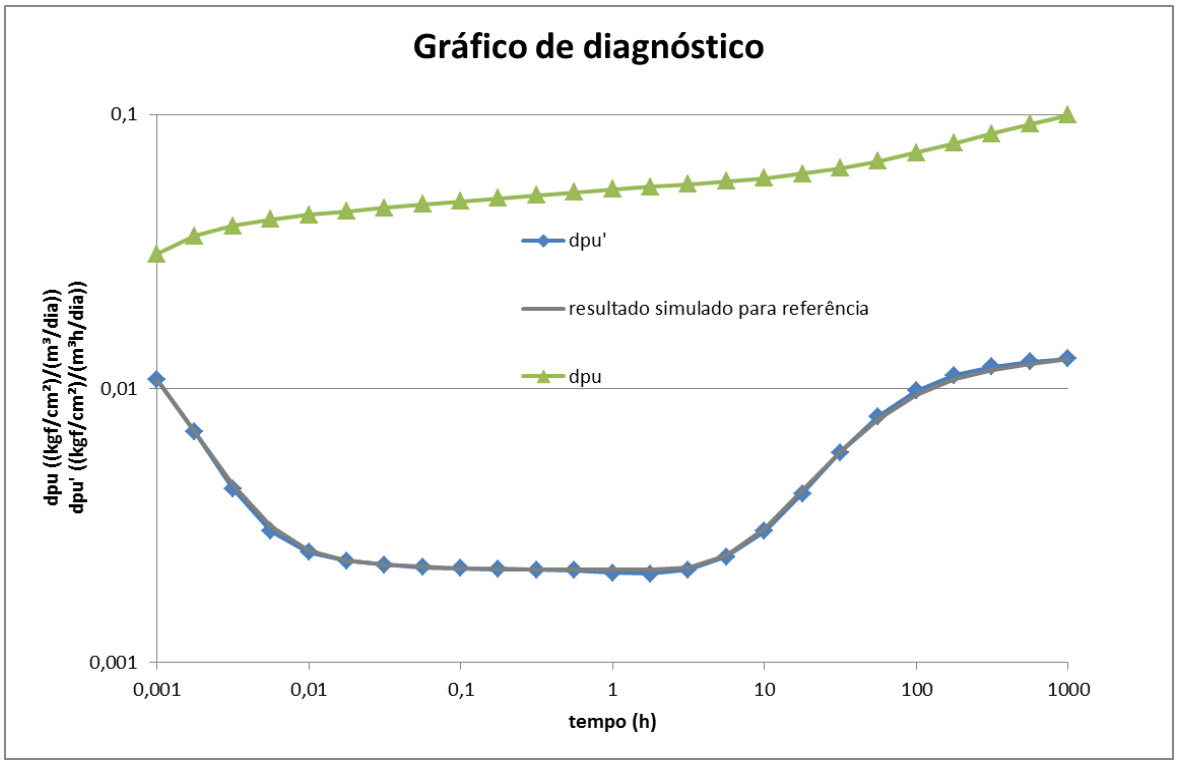

Figura 6-17 - Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão, $\lambda = 0{,}001$ **e** $\nu = 0{,}01$

Nesse caso (Figura 6-17), a razão entre os dois fluxos convergiu para $1{,}601262$, valor próximo à correção esperada de 1,6. Antes da iteração o valor (assumindo-se erro) era:

$$q_1/q_3 = 800/480 = 1{,}6667$$

Essa convergência do valor após o uso do Solver permite que se veja a correção do histórico de vazões.

6.5 Estudo de λ e ν assumindo incerteza na medição da vazão e na pressão estática inicial

Assumindo:

- $\lambda = 0{,}001$
- $\nu = 0{,}1$

- $p_0 = 495\ kgf/cm^2$
- $q_1 = 800\ m^3/dia$
- $q_3 = 480\ m^3/dia.$

A Figura 6-18 mostra o resultado após a iteração:

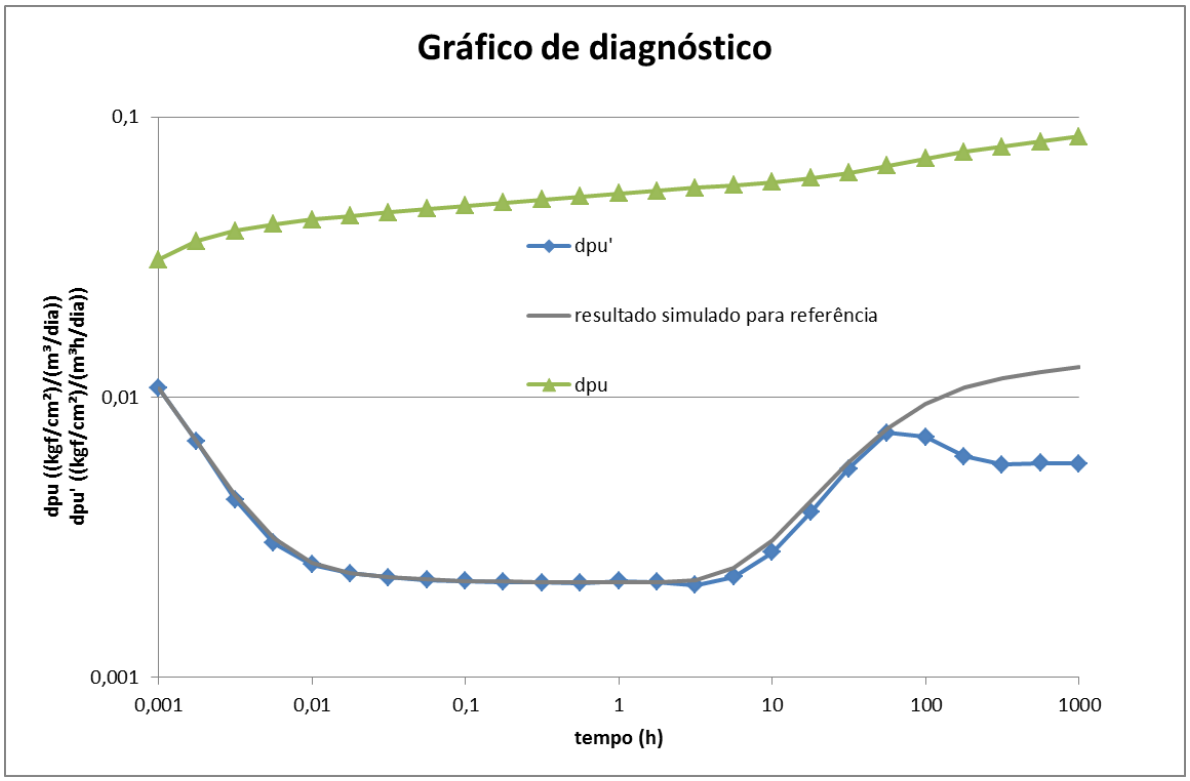

Figura 6-18 – Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão e em p_0 conjuntamente para $\lambda = 0,001$ e $\nu = 0,1$

O histórico de vazões calculado não se aproxima da fração esperada:

$$q_1/q_3 = 1,527835$$

Assim, pode-se mudar os valores λ ou ν, ou até mesmo dos dois pesos.

Assumindo:

- $\lambda = 0,0001$ (menor controle da curvatura)
- $\nu = 100$ (busca-se uma maior importância na correção do histórico de vazões)

- $p_0 = 495\ kgf/cm^2$
- $q_1 = 800\ m^3/dia$
- $q_3 = 480\ m^3/dia$

O gráfico de diagnóstico é apresentado na Figura 6-19:

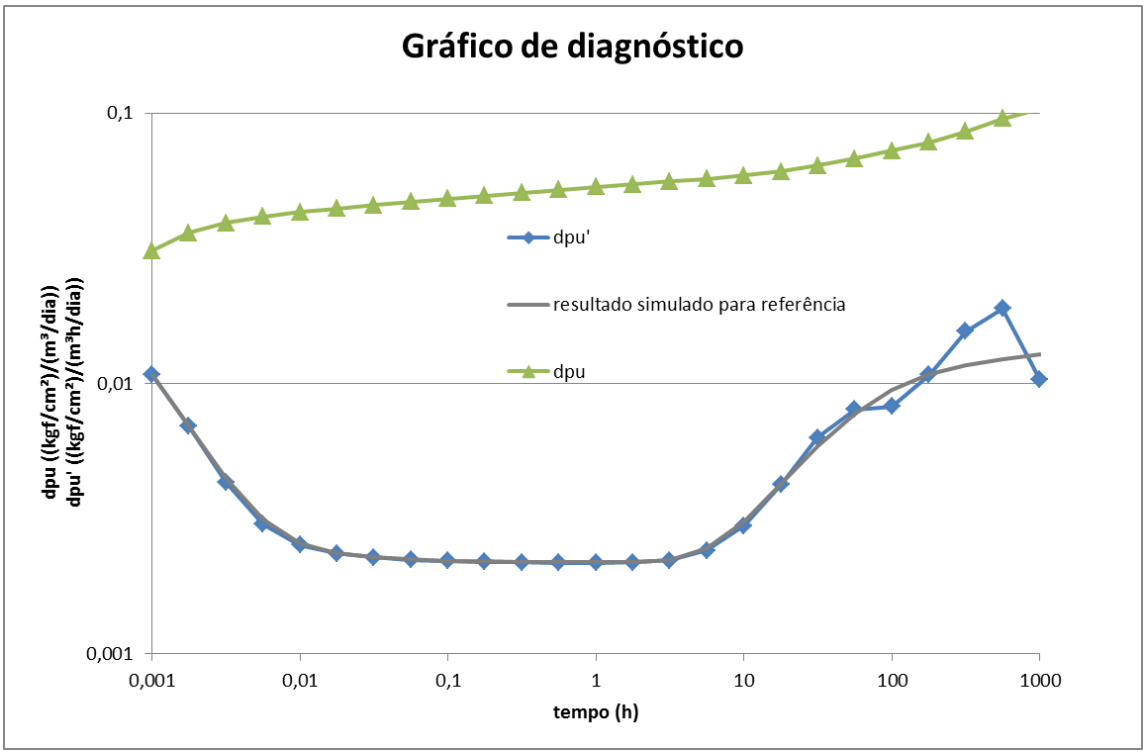

Figura 6-19 - Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão e em p_0 conjuntamente para $\lambda = 0,0001$ e $\nu = 100$

O resultado ainda não indica uma forma razoavelmente aceitável para o problema. A correção no histórico de vazões também não é muito eficiente:

$$q_1/q_3 = 1,666621$$

Este valor converge para os valores iniciais com o erro incluído ($q_3 = 480\ m^3/dia$) em vez de corrigir para o valor de $q_3 = 500\ m^3/dia$.

Assumindo-se novos pesos:

- $\lambda = 0,01$ (menor controle da curvatura)

- $\nu = 10$
- $p_0 = 495\ kgf/cm^2$
- $q_1 = 800\ m^3/dia$
- $q_3 = 480\ m^3/dia$

O gráfico é apresentado na Figura 6-20:

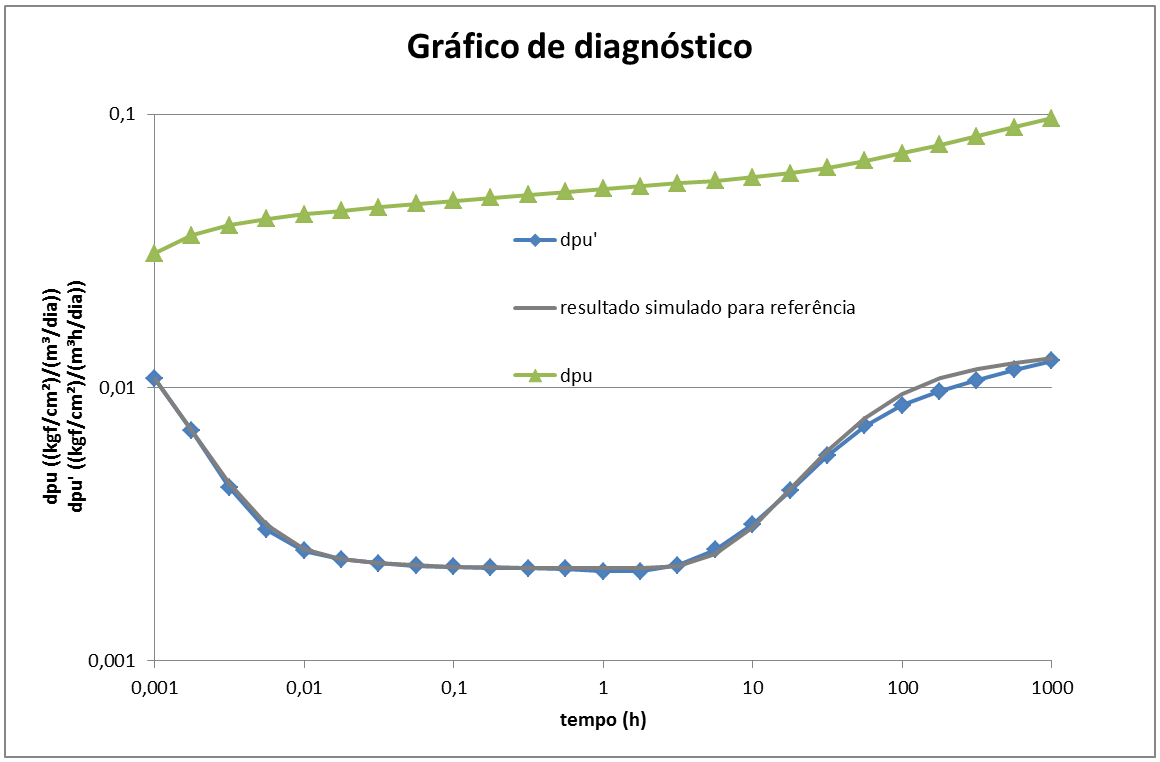

Figura 6-20 - Gráfico de diagnóstico para incerteza na medição da vazão e em p_0 conjuntamente para $\lambda = 0,01$ e $\nu = 10$

O ajuste se aproxima mais da curva de referência nesse caso. O histórico ainda não é corrigido para o valor inicial adotado (sem incerteza), mas a pressão estática inicial se aproxima mais de $500\ kgf/cm^2$.

A indeterminação do problema neste último estudo impede que todos os valores sejam devidamente corrigidos, mas o ajuste, ainda assim, é considerado bom. Pode-se ver a carta de teste e verificar o bom ajuste das estáticas (Figura 6-21).

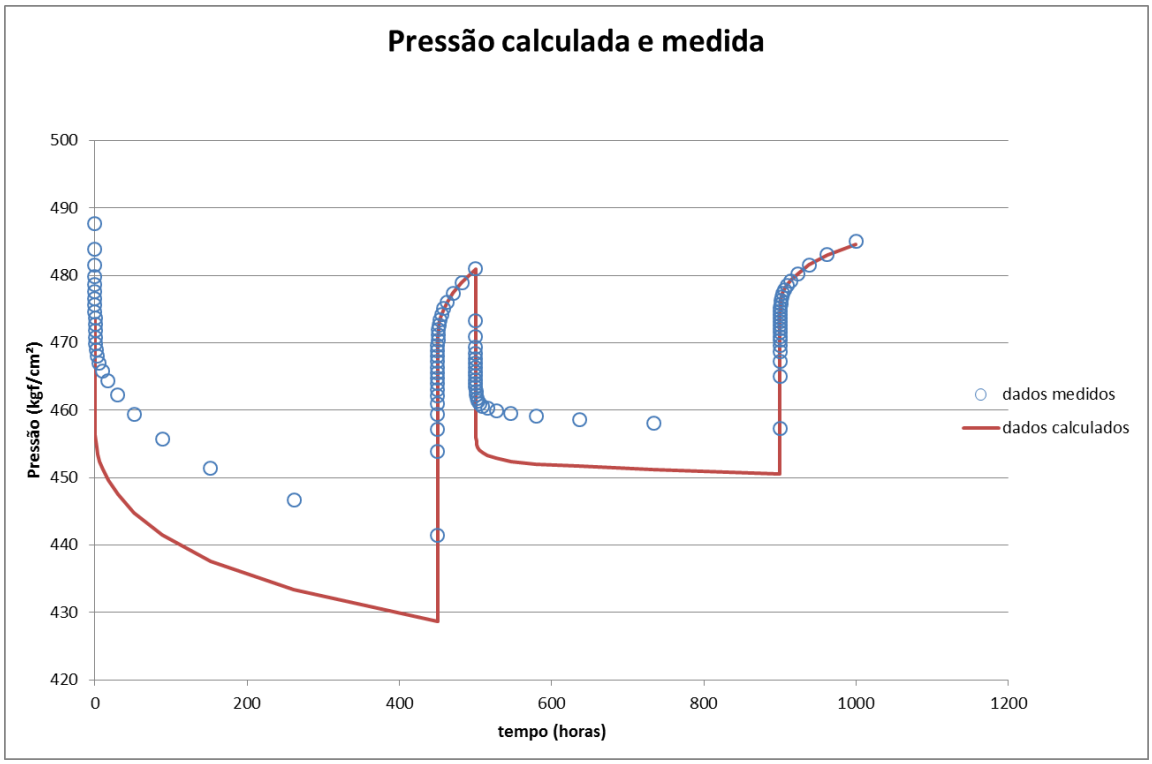

Figura 6-21 – Pressão calculada e medida para incerteza na medição da vazão e em p_0 conjuntamente para $\lambda = 0,001$ e $\nu = 0,1$

Os períodos de fluxo poderiam ser ajustados pela simples manipulação do Δp_{u_0}. No caso aqui presente, ele deveria ser reduzido do valor inicialmente assumido.

7 Conclusões

A versão do algoritmo de deconvolução proposta por VON SCHROETER *et al.* (2001, 2004) trouxe inegavelmente maiores clareza e eficiência ao processo de interpretação de testes de formação. O princípio matemático fundamental sobre o qual tal algoritmo se funda existia desde pelo menos meados do século XIX. No entanto, desde pelo menos desde a década de 1960, nenhum dos algoritmos propostos havia se mostrado robusto o suficiente.

A principal dificuldade encontrada era uma instabilidade provocada pelos ruídos existentes nos dados reais de pressão e vazão. Isso conduzia o resultado do problema para uma resposta oscilatória, a qual não possui correspondência com o problema físico, ou seja, a resposta difusiva do meio.

O grande mérito de VON SCHROETER *et al.* (2001, 2004) foi o de atingir uma resposta suave o suficiente, considerando os ruídos destacados. Para tanto, os autores aplicaram um método de minimização total do erro quadrático (*total least squares*) sobre uma função com 3 parcelas: erros associados às pressões e às vazões calculadas e medidas e um limitador ao somatório das curvaturas da derivada de pressões.

Diferente da totalidade dos autores que já publicaram algo sobre o algoritmo, este trabalho procurou apresentá-lo numa linguagem e numa organização mais palatáveis, partindo de expressões já conhecidas por profissionais atuantes na disciplina de Engenharia de Avaliação de Formações.

O algoritmo foi implementado no software Excel e, desta forma, foi possível entender de forma mais ampla o que ocorre durante o processo de minimização do erro e a importância da escolha dos pesos adequados para cada parcela da função objetivo.

Iniciou-se um trabalho de avaliação dos valores adequados para estes pesos e chegou-se a alguns resultados interessantes. No entanto, esta tarefa ainda deve ser repetida à exaustão para que se chegue a valores que possam ser considerados ideais. De toda maneira, os resultados alcançados serviram para atestar a validez do método e perceber seus limites.

Pode-se dizer que o algoritmo é efetivamente robusto e estável. Seu produto é a resposta característica do sistema, antes mesmo que seja feita qualquer modelagem. Esta resposta característica, diferente de quando o olhar se concentra em cada período de estática, no caso da deconvolução, permite avaliar o teste como um todo.

A interpretação de testes pré-deconvolução, também denominada aqui como convencional, ficava restrita a um cardápio de modelos existentes quando da busca pela conciliação entre pressões e vazões para a representação do teste como um todo. Isto era feito através de um longo processo de tentativa e erro.

Por não ser um fim em si mesmo, o usuário tem total controle sobre os resultados, confrontando a forma final com os dados medidos. Caso ela seja insuficiente, o processo pode ser repetido a partir de novas estimativas iniciais para os parâmetros.

Por fim, convém destacar que a formulação estudada é universal e, em princípio, aplicável também a testes de interferência, que representam as novas perspectivas do uso da ferramenta aqui estudada dentro da Engenharia de Avaliação de Formações. No caso, por exemplo, de dois poços no sistema, é necessário encontrar três respostas características: a de cada poço e a de interferência entre eles.

Poucos grupos tem se dedicado a este problema mais amplo e os resultados ainda não são tão estimulantes (ver CUMMING *et al*, 2013). É flagrante que o grau de indeterminação do problema tende a aumentar substancialmente em tal caso. No entanto, caso um algoritmo incrementado conclua esta tarefa, ele se constituirá num novo marco para a Engenharia de Reservatórios.

Bibliografia

BOURDET, D.; AYOUB, J. A.; PIRARD, Y. M., 1989, “Use of Pressure Derivative in Well Test Interpretation”, SPE Formation Evaluation, SPE 19215.

CUMMING, J. A.; WOOFF, D. A.; WHITTLE, T.; GRINGARTEN, A. C., 2013, “Multiple Well Deconvolution”, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, SPE 166458, New Orleans, Louisiana.

GOLUB, Gene H.; HANSEN, P. C.; O’LEARY, Dianne P., 1999, “Thikonov Regularization and Total Least Squares”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Volume 21, Issue 1, Philadelphia, USA.

GRINGARTEN, A. C., 2008, “From Straight Lines to Deconvolution: The Evolution of State of Art in Well Test Analysis”, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, SPE 102079, San Antonio, Texas.

GRINGARTEN, A. C., 2010, “Practical Use of Well Test Deconvolution”, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, SPE 134534, Florence, Italy.

HOUZÉ, O.; TAUZIN, E.; ALLAIN, O., 2010, “New Method to Deconvolve Well-Test Data Under Changing Well Conditions”, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, SPE 132478, Florence, Italy.

HOUZÉ, Olivier; VITURAT, Didier; FJAERE, Ole S. *et al*., 2011, ***Dynamic Data Analysis***, KAPPA.

ROSA, Adalberto José; CARVALHO, Renato de Souza; XAVIER, Jóse Augusto, 2006, ***Engenharia de Reservatórios de Petróleo***, Rio de Janeiro, Editora Interciência, p. 220.

THOMAS, JOSÉ EDUARDO (org.), 2001, ***Fundamentos de Engenharia de Petróleo***, 2 ed., Rio de Janeiro, Editora Interciência Ltda

VON SCHRÖETER, T.; HOLLAENDER, F.; GRINGARTEN, A. C., 2001, "Deconvolution of Well-Test Data as a Nonlinear Total Least-Squares Problem", SPE Annual Technical Conference and Exhibition, SPE 71574, San Antonio, Texas.

VON SCHRÖETER, T.; HOLLAENDER, F.; GRINGARTEN, A. C., 2004, "Deconvolution of Well-Test Data as a Nonlinear Total Least-Squares Problem", SPE Annual Technical Conference and Exhibition, SPE 77688, San Antonio, Texas.

Apêndice A – Obtenção da matriz A

No Método dos Mínimos Quadrados deve-se minimizar o erro quadrático, e^2, entre os valores calculados e os dados de entrada do problema (a serem ajustados).

Inicialmente, temos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} + \mathbf{E} \tag{A.1}$$

Onde:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{Xa}$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{y}^* - \mathbf{y} \tag{A.2}$$

Sendo **E** o vetor erro.

Portanto, o problema estabelecido é:

$$min_{a_j}\{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|^2\} \tag{A.3}$$

Assim, para minimizar o erro quadrático, deriva-se $\mathbf{e^2}$ em relação a $\mathbf{a}$ e iguala-se a 0:

$$\frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} \tag{A.4}$$

Logo,

$$\mathbf{E}^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{Xa})^{\mathbf{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{Xa})$$
$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} - \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{Xa} - \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} + \mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{xa} \tag{A.5}$$

Unindo as duas equações:

$$\frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial \mathbf{a}} = -2\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} + 2\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\,\mathbf{a} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(A.6)}$$

E pode-se finalmente resolver o problema para $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \qquad \textbf{(A.7)}$$

Apêndice B - Cálculo da curvatura

A curvatura no ponto central e seus dois vizinhos, limitante da solução proposta por VON SCHRÖETER *et al.* (2004) e adotada por todos os autores que os sucederam, pode ser calculada a partir do ângulo entre os vetores representados na Figura B-0-1 a partir da definição de produto vetorial descrita pela Equação (B.1).

$$sen\ \varphi_i = \frac{\|\mathbf{a}\ \mathrm{x}\ \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \qquad \textbf{(B.1)}$$

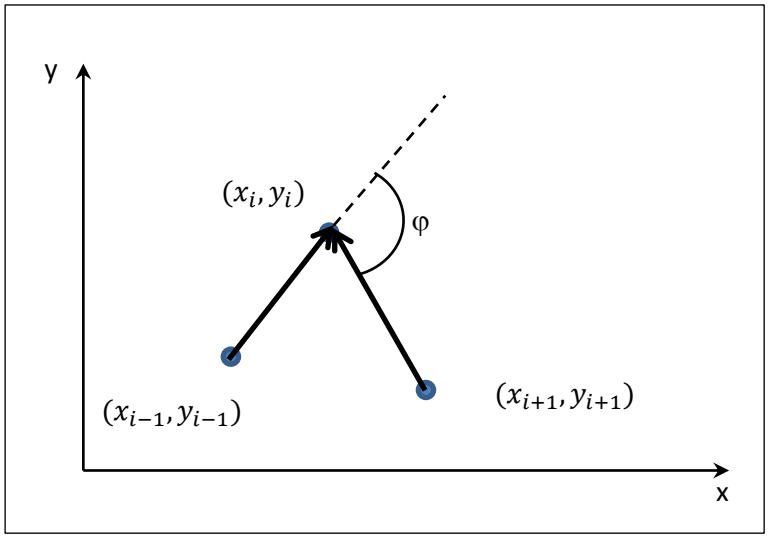

Figura B-0-1 - Cálculo da curvatura em dados discretos

Considerando-se o esquema acima se tem que:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} \qquad \textbf{(B.2)}$$

Onde:

$$a_x = (x_i - x_{i-1}) \quad a_y = (y_i - y_{i-1}); \qquad \textbf{(B.3)}$$
$$b_x = (x_i - x_{i+1}) \quad b_y = (y_i - y_{i+1}).$$

Com isso, as normas de **a** e **b** e do produto vetorial entre eles valem:

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \textbf{(B.4)}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \qquad \textbf{(B.5)}$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = a_x b_y - a_y b_x \qquad \textbf{(B.6)}$$

Aplicando-se (B.4), (B.5) e (B.6) em (B.1), temos:

$$sen\varphi_i = \sqrt{\frac{(a_x b_y - a_y b_x)^2}{(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}} \qquad \textbf{(B.7)}$$

Assumindo pontos regularmente espaçados no eixo x:

$$a_x = -b_x = \Delta x \qquad \textbf{(B.8)}$$

Assim, (B.8) passa a ser:

$$sen\varphi_i = \sqrt{\frac{\Delta x^2 (b_y - a_y)^2}{\Delta x^4 \left(1 + \frac{a_y^2}{a_x^2}\right)\left(1 + \frac{b_y^2}{b_x^2}\right)}} \qquad \textbf{(B.9)}$$

Por último, assumindo-se que o seno possa ser aproximado pelo próprio ângulo e que os termos em y do denominador possam ser desprezados, então:

$$\varphi = \frac{(b_y - a_y)}{\Delta x} \tag{B.10}$$

Através de (B.3):

$$\varphi_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x} \tag{B.11}$$