

MODELAGEM EM BAIXA FREQUÊNCIA DE MALHA DE ATERRAMENTO

Hyrllann Almeida de Souza

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Elétrica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Antonio Carlos Siqueira de Lima, D.Sc.

Rio de Janeiro Abril de 2016

MODELAGEM EM BAIXA FREQUÊNCIA DE MALHA DE ATERRAMENTO

Hyrllann Almeida de Souza

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO ELETRICISTA.

Examinado por:

Prof. Antonio Carlos Siqueira de Lima, D.Sc.

Prof. Robson Francisco da Silva Dias, D.Sc.

Prof. Jorge Nemésio Sousa, M.Sc.

Eng. Mauricio Monteiro Machado

Luiz Fernando Gitirana de Almeida

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL ABRIL DE 2016 Souza, Hyrllann Almeida de

Modelagem em baixa frequência de malha de aterramento

Hyrllann Almeida de Souza - Rio de Janeiro: UFRJ/

Escola Politécnica, 2016.

IX, 69 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Antônio Carlos Siqueira de Lima, D.Sc.

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Elétrica, 2016.

6....,...,

Referências Bibliográficas: p. 69.

 Aterramento. 2. Modelagem da malha de terra. 3. Subestações.
Lima, Antônio Carlos Siqueira II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Elétrica. III. Sistema de Energia Elétrica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por ter me presenteado com uma família tão especial.

Aos meus pais pelo apoio, paciência e confiança. Sempre presentes e preocupados com noites de estudo sem dormir ou dormindo sobre os livros.

À minha irmã que mesmo tendo seguido a área de humanas, sempre me ajudou com tudo que pôde.

À minha avó, meus tios e tias que sempre me incentivaram a seguir a carreira que escolhi. Infelizmente não poderei ver todos em minha formatura, mas sei que eles verão esse momento lá de cima, do melhor lugar.

Aos meus amigos que "tentaram" compreender minha ausência para estudar, fazer trabalhos e principalmente este de conclusão de curso.

Ao professor e orientador Antonio Carlos Siqueira de Lima, pelo apoio, disponibilidade e paciência que teve comigo na execução desse projeto de graduação e em especial por ter concluído a disciplina de subestações sempre com disposição e interesse, mesmo tendo presente apenas dois alunos.

Aos professores e funcionários da UFRJ, Jorge Nemésio, Robson Dias, Heloi, Sérgio Sami, Tatiana Lessa, Sandoval Carneiro, Richard Stephan, Antônio Lopes e Katia Tripolli, por terem sido fonte de inspiração durante esses anos e que muito contribuíram para minha formação profissional.

Aos amigos Betão, Alcir e Gláucio que muito me apoiaram e torceram por mim.

Aos Engenheiros Rodrigo Freisleben e Rafael Bertazzo pela confiança, apoio e ensinamentos.

Aos grandes amigos de graduação: Vanildo Cunha, Leandro Marinho, Diodotce e em especial Mauricio Machado, Sersan Dias, Maurício Dias, Marcos Roney e Gabriel Mesquita que além de grandes amigos que quero ter presentes para o resto da vida, foram fundamentais para minha formação. Sempre estavam disponíveis para me ajudar e ensinar matérias que tive dificuldade.

Desejo um dia poder retribuir de alguma forma.

A todos o meu muito obrigado!

iii

Resumo do Projeto Final apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Eletricista

MODELAGEM EM BAIXA FREQUÊNCIA DE MALHA DE ATERRAMENTO

Hyrllann Almeida de Sousa Abril/2016

Orientador: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Curso: Engenharia Elétrica

O objetivo desse trabalho é apresentar de forma clara e sucinta aspectos básicos do cálculo de sistemas de aterramento de subestações e estruturas de forma a facilitar a introdução ao tema nas disciplinas do curso de engenharia elétrica que venham a abordar o assunto. São abordados tanto os aspectos presente em algumas normas, onde há a formulação de expressões fechadas bem como uma modelagem computacional adequada para o estudo dos sistemas de aterramento em baixa e alta frequência. Uma análise paramétrica simplificada é apresentada para ilustrar e quantificar a importância das incertezas associadas na determinação do desempenho de um sistema de aterramento.

Palavras-chave: Aterramento, malha de terra, seguranças de pessoas e equipamentos elétricos.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Electrical Engineer.

LOW FREQUENCY MODELING OF GROUNDING SYSTEMS

Hyrllann Almeida de Souza April/2016

Advisor: Antonio Carlos Siqueira de Lima, D.Sc. Course: Electrical Engineering

This work addresses, in a clear and concise way, some of the basic aspects of grounding systems, independently if they are used as a meshed system in the case of substation grounding of just for grounding of a given structure. The goal is to provide a document that might be used in the courses that deal with the subject of grounding in undergraduate curricula. The closed form expressions contained in the IEEE std-80 related to grounding systems are compared with the results obtained using a detailed model based on cylindrical electrode modeling. The use of cylindrical electrode allows to develop a grounding system that provide accurate response in both low and high frequency range. The code used to obtain the responses is also included in this document. A simplified parametric analysis is provided in order to illustrate and compare the impact of some of the uncertainties associated with grounding system and that might affect the overall performance of a grounding system.

keywords: Grounding systems, grounding mesh, people and equipment safety.

Sumário

1 Introdu		trodução	1
	1.1	Motivação	2
	1.2	Objetivos	2
	1.3	Estrutura do documento	3
2 A		spectos Básicos de Subestações de Energia Elétrica	4
	2.1	Diagramas Unifilares dos Arranjos	5
3	As	spectos Básicos do Aterramento de Estruturas e Subestações de Energia Elétrica	.15
	3.1	Gradiente de Potencial	.16
	3.2	Resistência de Aterramento	.17
	3.3	Circulação de corrente no corpo humano e fibrilação ventricular	. 19
	3.4	Identificação dos parâmetros do solo	.20
	3.5	Aterramento de estruturas	.24
	3.6	Dimensionamento do condutor usado no aterramento	.25
	3.7	Potencial de toque	.26
	3.8	Potencial de passo	.28
	3.9	Representação de um sistema de aterramento por eletrodos cilíndricos	.29
4	Exemplos de Aplicação		.31
	4.1	Aterramento em cruz	.32
	4.1	1.1 Influência da condutividade elétrica do solo	.33
	4.1	1.2 Influência da condutividade elétrica do eletrodo	.35
	4.1	1.3 Influência da permeabilidade magnética do solo e do eletrodo	.36
	4.1	1.4 Influência da frequência	.37
	4.1	1.5 Influência da permissividade do solo	.38
	4.1	1.6 Influência da bitola do condutor de aterramento	.38
	4.2	Malha de aterramento simples	.39
	4.2	2.1 Influência do comprimento do eletrodo	.39

	4.2.2	Influência da densidade da malha	40				
5	Conclus	ões	42				
5.	1 Trat	valhos Futuros	42				
Apê	ndice A -	- Formulação por eletrodos cilíndricos	43				
Apê	ndice B -	- Código computacional para a configuração em cruz	48				
Apê	Apêndice C – Código computacional para a malha de aterramento60						
Refe	erências H	Bibliográficas	59				

Lista de Figuras

Figura 1: Custos relativos dos diversos tipos de arranjo5
Figura 2: Barramento singelo7
Figura 3: Barramento singelo com seccionamento longitudinal7
Figura 4: Barramento simples com disjuntor de acoplamento longitudinal7
Figura 5: Barramento principal e auxiliar9
Figura 6: Barramento duplo9
Figura 7: Barramento duplo com chave by pass10
Figura 8: Barramento duplo com chave by-pass para ambos barramentos11
Figura 9: Barramento em anel12
Figura 10: Disjuntor e meio13
Figura 11: Dois disjuntores14
Figura 12: Exemplo de eletrodo esférico injetando corrente radialmente16
Figura 13: Curva de resistividade aparente versus distância em relação ao eletrodo
esférico18
Figura 14: Método Wenner21
Figura 15: Curva típica do modelo de solo com 2 camadas22
Figura 16: Estratificação do solo em 2 camadas23
Figura 17: representação das reflexões de um eletrodo esférico em um solo de duas
camadas
Figura 18: Representação dos possíveis arranjos para o aterramento de estruturas de
linhas de transmissão25
Figura 19: Malha de aterramento em formato de cruz31
Figura 20: Malha de aterramento quadriculada32
Figura 21: Perfil de potencial no solo para aterramento em cruz
Figura 22: Perfil de potencial no solo de condutividade elétrica menor para aterramento
em cruz
Figura 23: Perfil de potencial no solo de condutividade elétrica maior para aterramento
em cruz
Figura 24: Perfil de potencial no solo com eletrodo de condutividade elétrica menor para
aterramento em cruz

Figura 25: Perfil de potencial no solo com eletrodo de condutividade elétrica maior para
aterramento em cruz
Figura 26: Perfil de potencial no solo com eletrodo de permeabilidade magnética maior
para aterramento em cruz
Figura 27: Perfil de potencial no solo com eletrodo de permeabilidade magnética menor
para aterramento em cruz
Figura 28: Perfil de potencial no solo para uma frequência maior para aterramento em
cruz
Figura 29: Perfil de potencial no solo com malha quadriculada de 2.916 m ² e eletrodos de
9 m
Figura 30: Perfil de potencial no solo com malha quadriculada de 2.916 m ² e eletrodos de
18 m40
Figura 31: Perfil de potencial no solo com malha quadriculada de 2.916 m ² e eletrodos de
27 m
Figura 32: Perfil de potencial no solo com malha quadriculada de 2.916 m ² , eletrodos de
9 m e $\Delta m = 9$ m

1 Introdução

O setor de energia elétrica tem papel fundamental no desenvolvimento socioeconômico de uma nação. Atualmente, é possível relacionar a expansão do setor elétrico e o respectivo aumento de demanda com a expansão da atividade produtiva. Além disso, o emprego de formas de geração distribuída como fontes renováveis e até mesmo pequenas centrais hidrelétricas coloca em destaque a necessidade de melhor conhecer todos os envolvidos do processo de transmissão e distribuição de energia, sejam eles responsáveis pela geração, transmissão/distribuição ou consumo de energia elétrica. Para tanto, faz-se mister uma melhoria significativa nos mecanismos de proteção de equipamentos e pessoas nos diversos cenários operativos que podem vir a ser encontrados. Atualmente, pode-se observar um crescente aumento do consumo de energia elétrica e, consequentemente, um aumento na demanda das subestações de energia elétrica.

Independentemente da atuação dentro do setor elétrico, i.e., seja geração, transmissão/distribuição ou consumidor industrial, a presença de subestações é um fator comum. Um ponto fundamental para o funcionamento de subestação e a correta operação da malha de terra de forma a não colocar em risco pessoas e/ou equipamentos em condição normal ou de contingência. Uma outra área, particularmente, importante é o escoamento de correntes para o solo seja pela malha de terra, seja por estruturas metálicas. É, novamente, o sistema de aterramento que desempenha o papel de manter a integridade e evitar desligamentos desnecessários. O sistema de aterramento é responsável por fornecer um caminho para escoar as correntes provenientes de falhas, evitando-se que um funcionário ou visitante seja submetido a uma descarga elétrica, podendo até levá-lo a óbito. Ademais, ele é necessário para evitar sobretensões ou sobrecorrentes capazes de danificar os elementos de uma subestação.

1.1 Motivação

No âmbito do curso de engenharia elétrica da UFRJ, o tema de aterramento é abordado somente nos períodos finais do mesmo. Por ser um tópico que envolve um conhecimento um pouco mais profundo do comportamento do campo eletromagnético e das realizações de circuitos equivalentes a partir do comportamento do mesmo, é comum o emprego de expressões fechadas que apresentam faixas de validades no domínio da frequência bastante limitadas. Conforme será mostrado nos capítulos a seguir do presente documento, é possível adequar um modelo mais rigoroso da representação do sistema de aterramento de forma simples, sucinta e reprodutível.

Desta forma, espera-se que a metodologia aqui apresentada possa ser amplamente empregada seja nos cursos de graduação do Departamento de Engenharia Elétrica, DEE, da Escola Politécnica da UFRJ. Para tanto, apresenta-se em anexo todos os casos empregados na obtenção dos potenciais de passo e toque associados às redes de aterramento. Esses casos foram implementados no programa Mathematica, usando o que atualmente é conhecido como *Wolfram Language*. Os programas aqui desenvolvidos podem ser reproduzidos tanto pelo referido programa ou usando a versão na 'nuvem' disponível gratuitamente [1].

1.2 Objetivos

Conforme mencionado acima, a principal motivação foi desenvolver uma estrutura para o estudo de sistemas de aterramento que possa vir a ser empregada nos cursos e até mesmo, por engenheiros do setor elétrico. Acredita-se que desta forma é possível uma maior disseminação do conhecimento, facilitando a possibilidade de aplicação de uma formulação mais rigorosa, e evitando-se, assim, o emprego de expressões fechadas presentes em normas como a IEEE std.80 [2] e evidenciando também a faixa de validade dessas expressões. Já houve no âmbito do DEE (Departamento de Engenharia Elétrica) da UFRJ outros trabalhos ligados ao tema de aterramento [3]-[6]. As notas de aula do falecido Professor Francisco Cohen [3] focam basicamente em aspectos relacionadas à norma IEEE std.80, e as referências [4] e [5] tratam de aspectos pontuais do sistema de aterramento. Em [6] apresentase uma introdução ao tema de aterramento baseado no uso de eletrodos cilíndricos [7]-[10]. No presente trabalho busca-se dar uma continuação ao trabalho em [6] apresentando cálculos de tensões de toque e passo da forma mais transparente o possível buscando incentivar a repetibilidade e extensão dos trabalhos aqui apresentados.

1.3 Estrutura do documento

O presente projeto apresenta, além do presente capítulo, outros 3, a saber:

- O capítulo 2 apresenta alguns aspetos básicos das subestações elétricas, o objetivo é apresentar um custo relativo dos diferentes arranjos, permitindo-se que em trabalhos futuros estabeleçam a relação entre a área envolvida no projeto de uma subestação e o desempenho elétrico da mesma;
- O capítulo 3 traz as bases da modelagem dos sistemas de aterramento, incluindose a identificação da resistividade do solo em baixa frequência e a representação dos condutores usados no aterramento
- O capítulo 4 traz dois exemplos de aplicação do aterramento, considerando um caso com condutores em cruz e uma malha de terra fictícia. Os testes consideram a variação dos diversos parâmetros envolvidos na modelagem de um sistema de aterramento.
- As principais conclusões desse trabalho e as sugestões de trabalhos futuros são apresentados no capítulo 5.

2 Aspectos Básicos de Subestações de Energia Elétrica

As subestações elétricas podem ser definidas como um conjunto de equipamentos utilizado para dirigir o fluxo de energia e garantir a segurança do sistema, provendo um ponto no qual podem ser instalados dispositivos de proteção e meios de desviar o fluxo por caminhos alternativos, adequando os valores das grandezas elétricas – elevando ou rebaixando para os padrões do trabalho a ser realizado.

As várias formas de conduzir os fluxos aos nós, também chamados de barramentos, são conhecidas como esquemas e apresentadas em forma de diagrama unifilar. As maneiras de dispor os equipamentos e barramentos numa subestação caracterizam um arranjo. A escolha do sistema a ser utilizado deve seguir determinados critérios, a saber: segurança do sistema, flexibilidade operativa, simplicidade da proteção, manutenção programada e de emergência, impacto ambiental, aumento de carga, custo inicial, e área ocupada. Esses dois últimos itens afetam diretamente o projeto de uma malha de terra, podendo ser fundamental na configuração da malha, determinação do espaçamento entre condutores e até mesmo do eventual tratamento do solo.

O estudo da área ocupada torna-se ainda mais necessário quando a subestação vai ser implantada em zona urbana, onde o solo apresenta grande valorização. Ainda deve ser incluída nesta avaliação a área necessária para as chegadas e saídas das diversas linhas de transmissão.

Já com relação ao custo, o tipo de arranjo além de impactar na área ocupada pela subestação afeta diretamente o custo, conforme mostrado esquematicamente na Figura 1 abaixo¹. A seguir apresenta-se, de forma bastante sucinta e usando apenas os diagramas unifilares, os diversos tipos de arranjos. As informações usadas para a elaboração da Figura 1 são apresentadas em [3].

¹ Excetuando-se quando explicitamente mencionado, todas as figuras foram elaboradas pelo autor.



Figura 1: Custos relativos dos diversos tipos de arranjo.

2.1 Diagramas Unifilares dos Arranjos

Apresentaremos a seguir os diagramas elétricos clássicos, mostrando as conveniências de cada tipo, bem como as suas particularidades. A partir destes diagramas básicos poderão ser derivados outros, a fim de atender a uma aplicação específica, onde uma solução clássica deixa a desejar.

A mais simples forma de reunir um certo número de circuitos simultaneamente é ligá-los como ramais de um condutor simples ou barramento.

Para aumentar a segurança, a facilidade de manutenção e flexibilidade de operação dos sistemas de potência, várias disposições sofrem evolução através dos anos, resultando em complexos sistemas modernos.

As formas básicas são: barramento simples, barramento principal e auxiliar, barramento duplo barramento em anel, barramento com $1\frac{1}{2}$ disjuntor, barramento com 2 disjuntores.

O arranjo conhecido como barramento simples é o mais simples tipo de barramento, sendo suficiente para um grande número de subestações de distribuições. A Figura 2 mostra o diagrama unifilar de uma subestação com barramento singelo. As principais características deste tipo de barramento são:

- a) Boa visibilidade da instalação. Com isso, o perigo de manobras errôneas por parte do operador é reduzido.
- b) Baixo custo de investimento (representa 88 % do custo de uma subestação idêntica em 138 kV com barramento duplo).
- c) Reduzida flexibilidade operacional. Em casos de manutenção de barramento ou nas seccionadoras associadas à barra é necessário desligar toda a subestação.
- Não apresenta segurança contra defeitos no barramento, já que tais defeitos resultariam na desconexão de todas as fontes de alimentação pelo sistema de proteção.

Pela introdução de seccionamento ao longo do barramento denominado "seccionamento longitudinal", são alcançadas possibilidades adicionais de operação, limitações de distúrbios e possibilidade de divisão de rede. Com este seccionamento ficam minimizados os tempos de desligamento dos circuitos, mesmo no caso de um defeito do barramento, separando-se a parte afetada e religando-se o restante. A Figura 3 mostra o barramento simples com seccionamento longitudinal.

O sistema que utiliza barramento simples com seccionamento ao longo do mesmo pode ser executado utilizando-se um disjuntor como seccionador longitudinal (Figura 4). Assim obtémse o chamado "barramento simples com disjuntor de acoplamento longitudinal".

Esta conexão oferece, ao contrário daquela com seccionamento longitudinal, uma conexão mais simples e possibilita a separação das diversas partes sem interrupção dos serviços (com o disjuntor operado manualmente ou automaticamente através de dispositivos de proteção). Uma instalação com esse tipo de execução básica oferece uma maior liberdade de movimento no que se refere às diversas possibilidades de operação.



Figura 2: Barramento singelo.



Figura 3: Barramento singelo com seccionamento longitudinal.



Figura 4: Barramento simples com disjuntor de acoplamento longitudinal.

Normalmente, em instalações de média tensão (até 34,5 kV) de grande porte, há necessidade de separar os barramentos por causa da presença de altas correntes de curtocircuito.

Essa separação é possível quando há um disjuntor de acoplamento longitudinal. Dá-se preferência a utilização de bobinas limitadoras de corrente (o que também seria uma solução)

quando se trata de instalações existentes e que devem ser ampliadas. Normalmente essa ampliação causa o aumento excessivo das correntes de curto, tornando-se necessária sua limitação.

O esquema denominado de "barramento principal e auxiliar" (ou "principal e transferência" ou ainda "operação e transferência") trata-se de um barramento simples ao qual foram adicionadas facilidades para livre manobra de qualquer disjuntor sem desligamento do circuito principal. Os encargos de proteção são transferidos ao disjuntor de acoplamento de barras (*bus tiebreaker* ou disjuntor de transferência ou disjuntor de amarre).

Isto requer uma adição de uma seccionadora de transferência para cada circuito de um segundo barramento e de um disjuntor de acoplamento com suas respectivas seccionadoras. Figura 5.

Os transformadores de corrente devem ser colocados no lado do alimentador (após a chave de linha) tal como indicado nos alimentadores A e B da Figura 5. Com isso consegue-se que eles permaneçam em serviço mesmo durante a utilização do disjuntor de transferência. Deste modo, a atuação de proteção do alimentador pode ser comutada para o disjuntor de transferência.

No caso da utilização dos TC's de bucha (TC's instalados nas buchas dos disjuntores – caso de disjuntores a grande volume de óleo), tal como indicado nos alimentadores C e D da Figura 5. Em caso de uma operação de transferência, há necessidade de se transferir também toda a proteção para os TC's do disjuntor de acoplamento (normalmente são utilizados nestes casos).

8



Figura 5: Barramento principal e auxiliar.



Figura 6: Barramento duplo

Para o arranjo conhecido como barramento duplo têm-se como característica principais:

- a) Liberdade de escolha das ligações para manobras.
- b) Divisão racional de todos os circuitos em dois grupos para limitação dos distúrbios e para melhor flexibilidade operacional permitindo perfeita divisão de cargas.
- c) Manutenção de um dos barramentos sem interrupção do fornecimento de energia. Por esta razão é bastante usado em locais onde é grande a contaminação dos isoladores. A Figura 6 mostra o esquema de barramento duplo.

Neste tipo de esquema é ainda possível a utilização de chave de by-pass nos disjuntores – Figura 7 – que passam assim a serem substituídos pelo disjuntor entre as duas barras. Este esquema só permite o by-pass de um disjuntor de cada vez e passa então a se caracterizar como principal e auxiliar.

Na Figura 7, a barra 1 passa a funcionar como barra auxiliar de quaisquer disjuntores, durante o *by-pass*.

Outro esquema mais elaborado, porém, derivado da barra dupla, prevê o emprego de mais uma chave seccionadora (Figura 7) permitindo assim não só o by-pass de cada disjuntor, mas também a escolha da barra a ser usada como auxiliar ou de transferência, este esquema é mostrado na Figura 8.



Figura 7: Barramento duplo com chave by pass.



Figura 8: Barramento duplo com chave by-pass para ambos barramentos.

As principais características do barramento em anel são resumidas abaixo:

- a) Um disjuntor pode ser retirado de serviço para manutenção sem prejudicar o funcionamento normal da instalação.
- b) Não se consegue divisão de carga como no caso do barramento múltiplo.
- c) Pouca visibilidade da instalação.
- d) Todos os equipamentos devem ser dimensionados para maior corrente do anel.
- e) Construção dispendiosa e de difícil ampliação.

No esquema em anel não existe o relé diferencial de barra, uma vez que os relés de linha servem para proteger a seção de barramento entre os disjuntores. O esquema deve ainda rever uma chave seccionadora na entrada da linha, de tal modo que, o anel possa ser fechado mesmo com a retirada de serviço de uma das linhas.

Se os relés de linha forem de distância com elementos direcionais e restrição de potencial, é importante que a fonte de potencial seja localizada ao lado do anel de tal modo que o relé continue a operar, mesmo quando a linha for desconectada da barra. O principal argumento contra a utilização do esquema em anel é que na ocorrência de um curto ocorre em uma segunda linha, estando um dos disjuntores já em manutenção, a fonte pode ser separada da carga. Esta ocorrência é minimizada limitando o número de circuitos por anel. A Figura 9 apresenta um circuito em anel com quatro disjuntores.



Figura 9: Barramento em anel.

O arranjo conhecido como disjuntor e meio tem como características principais a existência de um disjuntor de reserva para cada dois circuitos e disjuntores e seccionadoras especificados para suportar a corrente de dois circuitos. A operação normal destes esquemas prevê a energização de ambas as barras e todos os disjuntores fechados. Entretanto, eles podem ser retirados de serviço sem interrupção do fluxo de energia e sem perda dos relés de proteção. A Figura 10, a seguir, mostra o esquema de disjuntor e meio.



Figura 10: Disjuntor e meio

No caso da configuração com 2 disjuntores, tem-se como características principais oferecer grande segurança de serviço para toda a instalação, porém com altos custos de investimentos iniciais. A Figura 11 mostra o esquema de dois disjuntores.

A Tabela 1 provê uma comparação das configurações incluindo custo. Considerando o barramento simples como referência de custo igual a 1 pu. Os parâmetros considerados na estimativa do custo foram: utilização de dois circuitos com nível de tensão de 138 kV, levando-se em consideração somente os barramentos, chaves e disjuntores.



Figura 11: Dois disjuntores

Arranjo	Confiabilidade	Custo	Área Disponível
Barra Simples	Menor confiabilidade, pois falhas simples podem ocasionar o desligamento da SE.	Menor custo e menor número de componentes. (1 pu – valor de referência)	Menor área e menor número de componentes.
Barra Principal e Transferência	Baixa confiabilidade semelhante à da barra simples, porém uma melhor flexibilidade na operação e manutenção.	Custo moderado e poucos componentes. (2,06 pu)	Pequena área e poucos componentes.
Barra Dupla, Disjuntor Simples	Confiabilidade moderada.	Custo moderado e número de componentes um pouco maior. (2,15 pu)	Área moderada e número de componentes um pouco maior.
Barra Dupla, Disjuntor Duplo	Alta confiabilidade, pois falhas simples isolam apenas um circuito.	Custo elevado e número de componentes duplicado. (2,17 pu)	Grande área e dobro do número de componentes.
Barra Dupla, Disjuntor e Meio	Alta Confiabilidade, pois falhas simples isolam apenas um circuito.	Custo moderado e número de componentes um pouco maior. (1,69 pu)	Grande área, maior número de componentes por circuitos.
Barra em Anel	Alta confiabilidade, pois falhas simples isolam apenas um circuito.	Custo moderado, número de componentes um pouco maior. (1,62 pu)	Área moderada que aumenta com o número de circuitos.

Tabela 1: Comparação dos arranjos.

3 Aspectos Básicos do Aterramento de Estruturas e Subestações de Energia Elétrica

O sistema de aterramento é parte fundamental no projeto de subestações, pois é responsável por manter a segurança de pessoas e equipamentos em áreas energizadas. É essencial que a malha de terra seja capaz de escoar correntes provenientes de curtos-circuitos, fenômenos meteorológicos ou surtos de manobra, além da componente de sequência zero originada por algum desbalanço na rede ou funcionamento de dispositivos com chaveamento baseados em eletrônica de potência.

O dimensionamento do aterramento não é um processo trivial, no qual devem ser levados em consideração diversos estudos, como a modelagem e as características físico-químicas do solo. Trata-se de um processo adaptável para as características da região e das subestações. Tal flexibilidade pode ser exemplificada comparando-se subestações providas de cabos para-raios com aquelas que não possuem. As unidades que possuem blindagem por cabos para-raios podem apresentar resistências de aterramento de valor superior àquelas que não apresentam tal tipo de proteção, pois o cabo para-raios insere um divisor de corrente, servindo de caminho alternativo à malha de terra no escoamento de correntes provenientes de uma falha.

Na proteção de transeuntes nas subestações, seria ideal que o sistema de aterramento atuasse no sentido de formação de uma superfície equipotencial no solo, impedindo que a pessoa, ao caminhar, esteja submetida à uma diferença de potencial referenciada como tensão de passo.

A utilização da brita no solo de subestações garante um terreno irregular, impedindo a criação de pontos de tensão acumulada, baseando-se no fundamento teórico de que a tensão é resultante da integral de linha do campo elétrico.

3.1 Gradiente de Potencial

No cenário ideal de uma superfície equipotencial, seria necessária uma placa metálica idealmente condutora instalada em toda área do subsolo da subestação, se tornando praticamente inviável. Desta maneira, a malha é construída a partir de condutores metálicos de alta condutividade conectados entre si.

Consideremos um solo de resistência e dimensões finitas e resistividade constante, a aplicação de um eletrodo semi-esférico (hipotético) injetando uma corrente I senoidal, como mostrado na Figura 12, retirada de [6]. A adoção de eletrodos semi-esféricos se dá devido a facilidade de manipulação das expressões associadas. Na prática o mais comum é o emprego de eletrodos esféricos ou em hastes, contudo nesse caso o equacionamento é bastante distinto. Uma avaliação do impacto do tipo de eletrodo usado na identificação da resistividade do solo foge ao escopo do presente projeto, sendo deixado para trabalhos futuros. Contudo, deve ser mencionado aqui que a representação do eletrodo semi-esférico implica numa faixa de validade onde os afastamentos entre eletrodos é bem superior ao comprimento dos mesmos.



Figura 12: Exemplo de eletrodo esférico injetando corrente radialmente

Se a corrente se espalha radialmente no terreno, a densidade de corrente J (A/m^2) a uma distância x(m) do centro será dada por

$$J = \frac{I}{2\pi x^2} \frac{A}{m^2} \tag{1}$$

que por sua vez produz um campo elétrico de intensidade E (V/m) no material de resistividade $\rho(\Omega . m)$

$$E = \frac{\rho I}{2\pi x^2} \frac{V}{m} \tag{2}$$

A diferença de potencial entre as superfícies de raios B e x será dada por:

$$\Delta = \int_{B}^{x} E dx = \frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{1}{B} - \frac{1}{x} \right] \quad volts \tag{3}$$

Considerando um ponto infinitamente distante, o termo $\frac{1}{x}$ assumirá valor nulo, sendo a tensão entre a superfície do eletrodo e tal ponto distante sendo dada somente pela equação (4).

$$V = \frac{\rho I}{2\pi B} \quad volts \tag{4}$$

Desta forma, é possível abstrair um gradiente de potencial radial ao longo do solo, onde as linhas equipotenciais são dadas por semi-circunferências.

3.2 Resistência de Aterramento

A partir da Lei de Ohm, é possível calcular a resistência de aterramento a partir da equação (5).

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi B} \tag{5}$$

Analogamente, a resistência de aterramento mútua entre o eletrodo e um ponto a uma distância 'x' será conforme equação (6).

$$R_{B_{\chi}} = \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{\chi} \right) \tag{6}$$

Logo, a resistência de aterramento de um eletrodo genérico é um parâmetro que representa a relação entre a corrente injetada no solo e a elevação de potencial deste em relação a terra remota ou ideal, que é um ponto em que ao medir a diferença de potencial entre pontos radialmente próximos, o valor será pequeno o suficiente para que possa ser desprezado.

A partir das relações apresentadas acima para um eletrodo esférico, é possível traçar a curva de Resistência de Aterramento x Distância do Eletrodo, permitindo uma representação gráfica de tal distribuição de potencial no solo. Considerando uma esfera de raio B = 1 m enterrada em um solo de resistividade $\rho = 100\Omega$. *m* e utilizando a ferramenta *Matlab*, temos o gráfico mostrado na Figura 13: Curva de resistividade aparente versus distância em relação ao eletrodo esférico.



Figura 13: Curva de resistividade aparente versus distância em relação ao eletrodo esférico

A partir destes conceitos teóricos, é possível calcular a resistência de aterramento de um eletrodo. Deve-se considerar a elevação de potencial em relação a um ponto localizado em uma

distância no mínimo 5 vezes maior que o raio da esfera. A resistência de aterramento deve ser menor que a máxima resistência limite da sensibilidade do relé de neutro.

$$R_g = \rho_a \left(\frac{1}{L_{total}} + \frac{1}{\sqrt{20A_{malha}}} \left(1 + \frac{1}{1 + h\sqrt{\frac{20}{A_{malha}}}} \right) \right)$$
(7)

onde: $A_{malha} =$ Área ocupada pela malha [m²], H = Profundidade da malha [m], $L_{total} =$ Comprimento total dos cabos e hastes que formam a malha [m] $\rho_a =$ Resistividade Aparente [Ω .m].

3.3 Circulação de corrente no corpo humano e fibrilação ventricular

As fórmulas sobre os limites de correntes elétrica que podem circular pelo corpo humano são dadas de acordo com o limite de fibrilação ventricular, o tempo de circulação da corrente e a probabilidade de o corpo suportar o choque em um determinado tempo. Com um nível de confiança de 99,5%, pode-se afirmar que um homem de peso normal (70 kg) não sofre fibrilação ventricular se a corrente do choque for \leq que 91 a 95 mA, durante 3 s. Para fins práticos, não haverá fibrilação ventricular, com nível de confiança de 99,5%, se a corrente de choque obedecer à fórmula de Dalziel (IEEE).

Desta forma, a corrente que o corpo humano pode suportar está relacionado à intensidade e ao tempo de exposição. Pode-se aproximar para a equação (8).

$$I_C^2 \times t_e = S_B \tag{8}$$

$$I_C = \sqrt{\frac{S_B}{t_e}} \tag{9}$$

onde: I_C = Corrente no corpo [A], t_e = Tempo de exposição à corrente [s], S_B = Constante empírica que representa energia que o corpo pode tolerar sem fibrilar o coração (para uma frequência de 50-60 Hz), em 50 kg de massa corporal: S_B = 0,0135 e em 70 Kg de massa corporal: S_B = 0,0272.

3.4 Identificação dos parâmetros do solo

Devido ao seu caráter heterogêneo, o solo é fruto da maior quantidade de erros no dimensionamento do aterramento em subestações. Além da sua variabilidade morfológica e espacial, os fatores termo-químicos não podem ser desconsiderados e sofrem ampla influência de fatores exógenos como temperatura, quantidade de água dissolvida etc.

Devido ao fato de condução em baixas frequências no solo ser de natureza eletrolítica, a presença de sais e água aumenta muito a condução, deflagrando o impacto agudo de características ambientais na resistividade do solo. Todavia, em altas frequências, a partir de aproximadamente 1 MHz, o fenômeno físico da condutividade está fortemente associado com o processo dissipativo, devido às características dielétricas do meio e não às características físico-químicas.

Logo, uma boa representação do solo no projeto de uma malha de aterramento depende principalmente do modelo utilizado em relação a sua diversidade morfológica de várias camadas e a qualidade na determinação da resistividade, dependente de vários tipos de medições.

O método mais utilizado para a medição da resistividade é o método Wenner. Tal método consiste na injeção de corrente no solo por meio de dois eletrodos de corrente e a medição do potencial com os outros dois eletrodos adequados para tal fim. Os eletrodos devem estar

separados, longitudinalmente, por uma distância constante, que deverá ser variada seguindo uma progressão geométrica de razão 2, como demonstrada na **Figura 14**.



Figura 14: Método Wenner

A partir das medições de tensão e corrente, é possível obter a resistência através da divisão da primeira pela segunda. Desta forma, é possível obter uma resistividade aparente ponto a ponto a partir da equação (10),

$$\rho_a = \frac{4\pi LR}{1 + \frac{2L}{\sqrt{L^2 + 4B^2}} - \frac{L}{\sqrt{L^2 + B^2}}} \tag{10}$$

sendo L a distância entre os eletrodos em metros, R a resistência calculada a partir das medições em ohms (Ω) e B a profundidade dos eletrodos em metros e alterando a posição dos eletrodos, respeitando o método de Wenner, é possível obter diversas medições que possibilitam a formação de uma curva de resistividade aparente em função do espaçamento L entre os eletrodos. Quanto maior o número de arranjos obtidos de eletrodos, a curva representará com maior fidelidade o comportamento do terreno em que se instalará a subestação. Para espaçamentos maiores entre os eletrodos (L > 32 m), algumas precauções devem ser tomadas no sentido de evitar interferências eletromagnéticas nas medições, reduzindo-se o acoplamento entre os cabos de corrente e potencial. Devido a heterogeneidade do solo, tais dados obtidos devem sofrer um tratamento estatístico, afim de minimizar o efeito de acidentes locais e da natureza acidentada dos solos. A partir da interpretação da curva média de resistividade do solo é definido então o modelo do solo válido para a região onde se localiza a subestação.

A resistência do solo pode ser medida, ou, através da norma ABNT NBR 7117:2012 -Medição da resistividade e determinação da estratificação do solo, pode-se adotar o pior caso para o tipo de solo da região.

Tal estratificação permite ajustar a curva de resistividade aparente ao modelo com número de camadas do solo adequado. Na **Figura 15** pode-se ver uma curva de resistividade típica de um solo de duas camadas, em que a camada superficial é mais condutiva que o subsolo.



Figura 15: Curva típica do modelo de solo com 2 camadas

Se as medições realizadas abrangerem uma área 4 a 5 vezes maior que as dimensões da subestação, o solo pode ser aproximado para tal modelo quando não se encontrar pontos de resistividade com discrepância maior que 30%. Trata-se de aproximação teórica, pois não existe morfologia real dos solos que permita obter pontos de resistividade constante durante as medições.

Tal modelo considera uma camada superior de maior condutividade do que o subsolo. Para considerarmos representação do solo real em uma estratificação em duas camadas, é preciso

comparar a curva de resistividade aparente x espaçamento resultante das medições realizadas com um modelo de curva padrão. O modelo caracteriza-se por apresentar a primeira camada de solo com resistividade elétrica ρ_1 e espessura h_1 , e a segunda camada com resistividade ρ_2 e espessura infinita.



Figura 16: Estratificação do solo em 2 camadas

A variação da resistividade elétrica na fronteira entre as camadas de solo 1 e 2 é dada pelo fator de reflexão k, conforme equação (11).

$$k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \tag{11}$$

Para a determinação da curva padrão de resistividade de um solo de duas camadas deve-se admitir a injeção de corrente 'I' a partir de uma fonte de corrente pontual 'C' na superfície do solo. A resistência equivalente do modelo de duas camadas pode ser obtida a partir de valores medidos por meio do método de Wenner, em que a resistência aparente ρ_a é dada pela equação (12), onde 'a' é a distância em metros entre a fonte pontual 'C' e o ponto 'P' em questão.

$$\rho_a = \rho_1 \left\{ 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[4 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2 \right]^{1/2}} \right] \right\}$$
(12)

Tal expressão nos permite traçar curvas mostrando relação entre a/L e ρ_a/ρ_1 para diferentes valores de k, que serão as curvas aplicáveis para os solos estratificados em duas camadas. Quanto mais camadas o solo tiver, mais reflexões do eletrodo surgirão, conforme a figura abaixo (desenho fornecido pelo orientador desse trabalho).



Figura 17: representação das reflexões de um eletrodo esférico em um solo de duas camadas.

3.5 Aterramento de estruturas

Torres autoportantes ou estaiadas usadas em circuitos de transmissão de energia elétrica, torres de telefonia, prédios e até mesmo casas usualmente demandam a instalação de um sistema de aterramento para preservar a integridade de pessoas em contato com partes que possam vir a ser energizadas direta ou indiretamente.

Nos casos de torres de transmissão de energia elétrica, o sistema de aterramento é composto por cabos contrapesos. Tais cabos conectam-se à estrutura de sustentação da torre, são os responsáveis pela chamada resistência de pé de torre, tem como função proteger as partes "vivas" do circuito de descargas atmosféricas, induções devido a circuitos próximos e prover um caminho de escoamento da corrente no caso de acidentes como ruptura da cadeia de

isoladores ou rompimento do cabo condutor. Tipicamente, os cabos contrapesos são enterrados próximos a superfície do solo entre 0,5 m ou 1 m com comprimento entre 30 m até 120 m [11]. A Figura 18 apresenta esquematicamente possíveis arranjos do aterramento de uma torre de linha de transmissão.



Figura 18: Representação dos possíveis arranjos para o aterramento de estruturas de linhas de transmissão.

3.6 Dimensionamento do condutor usado no aterramento

Em uma aproximação usual para se dimensionar o condutor da malha, leva-se em consideração os esforços mecânicos e térmicos.

Para o dimensionamento térmico de cabos de cobre, pode-se usar a fórmula de Onderdonk [3]. Essa fórmula considera o calor produzido pela corrente de curto-circuito ao percorrer o condutor.

$$S_{mm^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{TCAP.10^{-4}}{t_c.\alpha_r.\rho_r}} \ln\left(\frac{K_0 - Tm}{K_0 + Ta}\right)}$$
(13)

onde: S_{mm^2} = Seção mínima do condutor da malha [mm²], I = Corrente do defeito que passa pelo condutor [A], tC = Duração do defeito [s], Ta = Temperatura ambiente [oC], Tm = Temperatura máxima permissível [oC], αr = Coeficiente térmico [oC-1], ρr = Resistividade do condutor de aterramento [$\mu\Omega m$], αo = Coeficiente térmico a 0 oC [oC-1], Ko = αo -1oC e TCAP = Capacidade térmica por unidade de volume [J/cm3.oC].

3.7 Potencial de toque

O potencial de toque da malha, por definição, é o maior potencial de uma submalha quando em máximo defeito fase-terra. Esses valores maiores normalmente são encontrados nos cantos da malha e podem ser calculados pela seguinte expressão:

$$E_t = \frac{\rho. K_m. K_i. I_G}{L_{total}}$$
(14)

onde K_m é uma constante relacionada ao fator geométrico dada por

$$K_m = \frac{1}{2.\pi} \left(ln \left(\frac{D^2}{16.h.d} + \frac{(D+2.h)^2}{8.D.d} - \frac{h}{4.d} \right) + \frac{K_{ii}}{K_h} ln \left(\frac{8}{\pi.(2.n-1)} \right) \right)$$
(15)

e

$$K_h = \sqrt{1 + \frac{h}{h_0}} \tag{16}$$

 K_{ii} =1 para a malha com hastes cravadas nos cantos ou ao longo do perímetro, h_0 é a profundidade de referência da malha. Caso contrário, se na malha possui poucas hastes não localizadas nos cantos ou perímetros ou sem hastes

$$K_{ii} = \frac{1}{(2.n)^{\frac{2}{n}}}$$
(17)

sendo n o Número efetivo de condutores em paralelo. Se a malha for irregular, deve-se considerar o número de condutores em paralelo de uma malha retangular equivalente.

$$n = n_a. n_b. n_c. n_d \tag{18}$$

$$n_a = \sqrt{\frac{2.L_c}{L_p}} \tag{19}$$
onde: $n_b = 1$ para malha quadrada, $n_c = 1$ para malha quadrada e retangular, $n_d = 1$ para malha quadrada, retangular e malha L, L_c = Comprimento total dos condutores horizontais da malha [m] e L_p = Comprimento dos condutores na periferia da malha [m].

Para os demais casos:

$$n_b = \sqrt{\frac{L_p}{4.\sqrt{A}}} \tag{20}$$

$$n_c = \left(\frac{L_x \cdot L_y}{A}\right)^{\frac{0.7 \cdot A}{L_x \cdot L_y}}$$
(21)

$$n_{d} = \frac{D_{m}}{\sqrt{L_{x}^{2} \cdot L_{y}^{2}}}$$
(22)

onde: A = Área da malha [m²], $L_x = \text{Comprimento}$ máximo da malha na direção x [m], $L_y = \text{Comprimento}$ máximo da malha na direção y [m], $D_m = \text{Máxima}$ distância entre dois pontos da malha [m], d = Diâmetro do condutor da malha [m], h = profundidade da malha [m], D = Espaçamento entre condutores em paralelo [m], $\rho = \text{Resistividade}$ do solo [Ω . m], $I_G = \text{Corrente}$ máxima de defeito através do condutor [A], $L_m = \text{Comprimento}$ total dos condutores da malha [m] e $K_i = \text{Coeficiente}$ de irregularidade.

$$K_i = 0,644 + 0,148.\,n\tag{23}$$

Para malhas sem hastes ou com poucas e não localizadas nos cantos ou ao longo do perímetro da malha, o comprimento efetivo dos cabos enterrados é:

$$L_m = L_C + L_R \tag{24}$$

onde: L_R = Comprimento total de todas as hastes.

Para malhas com hastes nos cantos, ao longo do perímetro e dentro da malha, o comprimento efetivo dos cabos da malha é:

$$L_{m} = L_{C} + \left(1,55 + 1,22\left(\frac{L_{r}}{\sqrt{L_{x}^{2} + L_{y}^{2}}}\right)\right)L_{R}$$
(25)

onde: L_r = Comprimento de uma haste, I_G = Máxima corrente da malha que flui entre a malha de aterramento e o solo (Incluindo a componente DC).

$$I_G = S_f . D_f . 3. I_0 \tag{26}$$

onde: Sf = Fator de divisão da corrente de curto -circuito, Df = Fator de decremento e 3.I₀ =Corrente de curto-circuito trifásico simétrico.

O potencial de toque também pode ser considerado como a diferença de potencial a que é submetido um indivíduo que toque uma estrutura (carcaça de equipamento, torre de linha de transmissão, etc.) aterrada no eletrodo de terra que sofre uma elevação de potencial. Simplificando, pode-se aproximar para a seguinte expressão de potencial de toque:

$$V_{toque} = \frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{1}{B} - \frac{1}{x} \right] \quad volts \tag{27}$$

O potencial máximo admissível segue abaixo na equação (28):

$$V_{toque\ m\acute{a}x} = (R_C + 1,5\rho)I_C \tag{28}$$

onde: R_C = Resistência interna do corpo.

A norma IEEE Std – 80 [2] considera que resistência ente os pés, entre as mãos ou entre a mão e o pé é de 1000 Ω .

3.8 Potencial de passo

Potencial de passo é o maior potencial que surge na superfície da malha, quando ocorre o máximo defeito fase-terra.

$$E_p = \frac{\rho. K_S. K_i. I_G}{L_{Total}}$$
(29)

onde: K_S = Coeficiente que introduz no cálculo a maior diferença entre dois pontos distanciados de 1m. K_S relaciona todos os parâmetros da malha que induzem na superfície da terra.

$$K_{S} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2.h} + \frac{1}{D+h} + \frac{1}{D} (1 - 0.5^{n-2}) \right)$$
(30)

Parâmetro de extrema importância para dimensionamento de uma malha de terra de projetos de subestações é o potencial de passo, que visa garantir a segurança da vida humana.

Considerando que o solo da subestação não é uma superfície equipotencial, podemos calcular a diferença de potencial que um homem pode estar submetido ao caminhar sobre o terreno conforme a seguinte aproximação:

$$V_{passo} = \int_{y}^{x} E dx = \frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right] \quad volts \tag{31}$$

O potencial máximo admissível segue abaixo na equação (32):

$$V_{passo\ m\acute{a}x} = (R_C + 6\rho)I_C \tag{32}$$

3.9 Representação de um sistema de aterramento por eletrodos cilíndricos

Nas duas seções anteriores foram apresentadas as expressões das tensões de toque e passo para uma dada malha de terra. Para a obtenção dessas expressões considera que os condutores da malha de terra proveem um caminho ideal para a circulação de corrente e dada que a condutividade do cobre é algumas ordens superior que a condutividade dos solos encontrados, tal aproximação é válida para estudos de fenômenos lentos próximos à frequência industrial. Contudo, para estudos de fenômenos rápidos como transitórios de manobra ou relacionados às descargas atmosféricas, tal aproximação não é mais adequada. Há na literatura [2] algumas expressões propostas para esse cenário. Contudo, adota-se aqui uma abordagem distinta, empregando-se eletrodos cilíndricos que permitem tanto a análise em baixa frequência, foco principal do presente trabalho, como a avaliação em altas frequências, deixado para trabalhos futuros.

A modelagem por eletrodos cilíndricos nada mais é que a representação explicita dos condutores que compõem a malha de terra, permitindo-se assim calcular tanto a impedância transversal da malha, fundamental para a avaliação dos potencias de passo e toque, como a impedância longitudinal, essencial para a determinação da injeção de corrente no meio devido a um dado sistema de aterramento.

Na abordagem por eletrodos cilíndricos, também apresentada na literatura como modelo eletromagnético híbrido [10][12] (HEM de *Hybrid Electromagnetic Model*), os condutores são representados como linhas de transmissão de comprimento finito. Os parâmetros unitários são obtidos a partir da aproximação quase estacionária do campo eletromagnético gerado pelo condutor devido a uma injeção de corrente arbitrária. O capítulo 3 de [6] apresenta o detalhamento das expressões de impedância longitudinal e transversal empregando eletrodos cilíndricos. O apêndice A do presente documento apresenta de forma resumida essa formulação.

4 Exemplos de Aplicação

Nesse capítulo são apresentados dois casos testes, relativamente simples, para permitir o estudo concreto do impacto da variação do comportamento dos elementos envolvidos no sistema de aterramento. Ambos os casos são baseados nos exemplos apresentados em [6]. Os códigos desenvolvidos na chamada *Wolfram Language* usando o programa Mathematica são detalhados nos apêndices B e C.

O primeiro exemplo é um arranjo em cruz, similar ao tipicamente usado para o aterramento de estruturas em níveis mais baixos de tensão, conforme mostra a Figura 19. O segundo caso é uma malha de terra simples, conforme apresentada na Figura 20. Ainda na referida figura apresenta-se a segmentação empregada na representação dos eletrodos. Dado que o foco principal do presente trabalho está na baixa frequência optou-se por representar cada condutor que compõe a malha de terra pela conexão em cascata de dois eletrodos cilíndricos de igual comprimento. Para estudos envolvendo mais alta frequência é possível que essa segmentação seja inadequada, o estudo de critérios da segmentação dos eletrodos cilíndricos para a representação da malha de terra foge ao escopo do presente trabalho, sendo sugerido como trabalho futuro.



Figura 19: Malha de aterramento em formato de cruz



Figura 20: Malha de aterramento quadriculada

4.1 Aterramento em cruz

Para a malha em formato de cruz, foram adotados os parâmetros relacionados a seguir:

 $\sigma s = 0.001$ é a condutividade elétrica do solo em S/m

 $\sigma e = 10^8$ é a condutividade elétrica do eletrodo em S/m

 $\Delta i = 11.7 \times 10^{-3}$ é a variação da imitância do solo em S/m

 $\alpha = 0.7$ é o parâmetro adimensional que determina a dependência da imitância com a

frequência

 $\mu s = 4. \pi. 10^{-7}$ é a permeabilidade magnética do solo em N/A²

 $\mu e = 4. \pi. 10^{-7}$ é a permeabilidade magnética do eletrodo em N/A²

 $\epsilon = 8.854.10^{-12}$ é a permissividade dielétrica em F/m

bs = 0,001 é o raio do condutor em metros

Ls = Lr = 1 são os comprimentos dos eletrodos em metros

I = 1 é a corrente injetada no nó central em Ampères

 $f = 10^{-15}$ é a frequência em Hz.

A partir desses parâmetros obtém-se, através da modelagem computacional, o perfil de

potencial no solo, mostrado na Figura 21.



Figura 21: Perfil de potencial no solo para aterramento em cruz

Considerando um adulto de estatura mediana, ao caminhar, atinge um metro de comprimento entre os pés, pelo gráfico pode-se constatar que esta pessoa estaria submetida a um potencial de até aproximadamente 100 V.

Para tanto, basta calcular a diferença de potencial entre dois pontos quaisquer para se determinar o potencial em que esses pontos estão submetidos.

Utilizando esse perfil de potencial como base, pode-se analisar a influência de cada parâmetro através das simulações que seguem.

4.1.1 Influência da condutividade elétrica do solo

Na Figura 22 pode-se observar o perfil de tensão com um solo que possui a condutividade elétrica dez vezes menor. Antes se tinha $\sigma s = 0,001$ S/m, para esta simulação utilizou-se $\sigma s = 0,0001$ S/m.



Figura 22: Perfil de potencial no solo de condutividade elétrica menor para aterramento em cruz

Por sua vez, na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**Figura 23 pode-se observar o perfil de tensão com um solo que possui a condutividade elétrica dez vezes maior. Antes σs = 0,001 S/m, e para esta simulação utilizou-se σs = 0,01 S/m.



Figura 23: Perfil de potencial no solo de condutividade elétrica maior para aterramento em cruz

Pode-se concluir que a condutividade elétrica do solo influencia ativamente o perfil de tensão. Quanto maior for a condutividade elétrica do solo, menor será a tensão máxima e mais suave será a variação do potencial, garantindo que os mesmos dois pontos avaliados no gráfico base, estarão submetidos a um potencial bem menor.

O solo pode variar muito sua condutividade ao longo do tempo, tendo em vista, chuvas e reações químicas. Em geral, o tratamento químico do solo é muito caro, faz-se somente próximo aos eletrodos verticais.

Antes o potencial que um ser humano estaria submetido ao caminhar atingia até aproximadamente 100 V. Neste solo avaliado, atinge-se até aproximadamente 10 V. O valor aceitável é entre 7 V e 8 V.

4.1.2 Influência da condutividade elétrica do eletrodo

Na Figura 24**Erro! Fonte de referência não encontrada.** pode-se observar o perfil de tensão com um eletrodo que possui a condutividade elétrica cem mil vezes menor. Antes se tinha $\sigma e = 10^8$ S/m, para esta simulação utilizou-se $\sigma e = 10^3$ S/m.





Na Figura 25**Erro! Fonte de referência não encontrada.** pode-se observar o perfil de tensão com um eletrodo que possui a condutividade elétrica cem mil vezes maior. Antes se tinha $\sigma e = 10^8$ S/m, para esta simulação utilizou-se $\sigma e = 10^{13}$ S/m.



Figura 25: Perfil de potencial no solo com eletrodo de condutividade elétrica maior para aterramento em cruz

Pode-se concluir que a condutividade elétrica do eletrodo influencia o perfil de tensão, não tanto quanto a condutividade do solo, mas influencia. Quanto maior for a condutividade elétrica do eletrodo, menor será a tensão máxima e mais suave será a variação do potencial, garantindo que os mesmos dois pontos avaliados no gráfico base, estarão submetidos a um potencial menor. Quando antes o potencial que um ser humano estaria submetido ao caminhar atingia-se até aproximadamente 100 V, nestas novas condições atinge-se até aproximadamente 75 V. Reduzindo as diferenças de potencial e o risco de acidentes, por isso utiliza-se eletrodos de alta condutividade.

4.1.3 Influência da permeabilidade magnética do solo e do eletrodo

Através das simulações pôde-se analisar que a permeabilidade magnética do solo, não causou perceptível alteração no perfil de tensão. Já para a permeabilidade magnética do eletrodo, grandes variações da ordem de 10⁵ vezes seu valor original, alteram sensivelmente o perfil de tensão.

Na Figura 26**Erro! Fonte de referência não encontrada.** vê-se o gráfico para a permeabilidade $\mu = 4 \times \pi \times 10^{-2}$.



Figura 26: Perfil de potencial no solo com eletrodo de permeabilidade magnética maior para aterramento em cruz

A Figura 27 mostra o gráfico para a permeabilidade $\mu = 4 \times \pi \times 10^{-12}$. Pode-se perceber que quanto maior a permeabilidade magnética do eletrodo, menor a tensão máxima no solo.



Figura 27: Perfil de potencial no solo com eletrodo de permeabilidade magnética menor para aterramento em cruz

4.1.4 Influência da frequência

Na Figura 28**Erro! Fonte de referência não encontrada.** pode-se observar o perfil de tensão com uma frequência um milhão de vezes maior. Antes, a configuração foi analisada baseada numa abordagem bem próxima da corrente contínua, a corrente injetada possui frequência de 10⁻¹⁵ Hz. Esse valor é mudado para 1 nHz, que apesar de ainda ser uma frequência bem baixa, já é algumas ordens de grandeza superior ao caso inicial, e ainda assim bem próximo de um "estado de corrente contínua".



Figura 28: Perfil de potencial no solo para uma frequência maior para aterramento em cruz

Pode-se constatar que com uma frequência maior, a tensão máxima diminuiu. Usando mais uma vez uma passada de um metro como referência, o dono desta passada estaria submetido a um potencial de até 75 V. Muito embora não apresentados aqui em destaque, foi possível averiguar que até frequências próximas de mHz não houve mudança significativa do perfil de tensão.

A condução de corrente no solo em baixas frequências ocorre por um processo eletrolítico, um processo lento e muito dependente das características físicas e químicas do solo. Já para altas frequências a condutividade do solo está associada a um processo dissipativo.

4.1.5 Influência da permissividade do solo

Por se tratar de um estudo envolvendo apenas frequências bem baixas, não foi possível observar mudanças no perfil de tensão no solo para uma variação no valor da permissividade do solo.

4.1.6 Influência da bitola do condutor de aterramento

Por se tratar de um estudo em baixa frequência, onde o efeito dominante é da impedância transversal que existe entre o sistema de aterramento e o solo, a bitola do condutor não afeta significativamente o perfil de tensão no solo. A escolha da bitola está mais voltada para os níveis de corrente do circuito, tempo de exposição às correntes especificadas e não especificadas e custo.

4.2 Malha de aterramento simples

4.2.1 Influência do comprimento do eletrodo

Na Figura 29 pode-se observar o perfil de tensão de uma malha de 2.916 m² com eletrodos de 9 m de comprimento.



Figura 29: Perfil de potencial no solo com malha quadriculada de 2.916 m² e eletrodos de 9 m

Por sua vez, na Figura 30**Erro! Fonte de referência não encontrada.** pode-se observar o perfil de tensão de uma malha de 2.916 m² com eletrodos de 18 m de comprimento. Percebese que, quanto maior o comprimento dos eletrodos, menor a tensão máxima a que o solo estará submetido e o perfil de tensão torna-se mais suave, garantindo uma menor diferença de potencial entre dois pontos quaisquer escolhidos nessa condição comparativamente com os mesmos dois pontos na condição anterior.



Figura 30: Perfil de potencial no solo com malha quadriculada de 2.916 m² e eletrodos de 18 m

4.2.2 Influência da densidade da malha

A Figura 31 mostra o perfil de tensão de uma malha de 2.916 m² com eletrodos de 9 m de comprimento e uma distância entre eletrodos paralelos de 27 m ($\Delta m = 27$ m). Na Figura 32 pode-se observar o perfil de tensão de uma malha de 2.916 m² com eletrodos de 9 m de comprimento e uma distância entre eletrodos paralelos de 9 m ($\Delta m = 9$ m). Percebe-se que quanto mais densa for a malha, mais suave o perfil de tensão sob o solo e menor é a tensão máxima.

A partir dessa simulação, percebe-se também, que há uma tendência em se obter o maior valor de tensão no centro da malha, independentemente do ponto de injeção de corrente. Há uma redução da tensão conforme se afasta do centro e nas extremidades uma variação mais brusca.

Para tornar o perfil de tensão mais suave nas extremidades, diminuir os efeitos de pontas e aumentar as áreas de escoamento de corrente, usualmente próximo às extremidades, as malhas são mais densas que no centro.



Figura 31: Perfil de potencial no solo com malha quadriculada de 2.916 m² e eletrodos de 27 m.



Figura 32: Perfil de potencial no solo com malha quadriculada de 2.916 m², eletrodos de 9 m e $\Delta m = 9$ m.

5 Conclusões

O objetivo principal desse projeto é apresentar aspectos básicos do aterramento de estruturas e subestações, facilitando o emprego das mesmas nos cursos de graduação. Apresenta-se também uma breve revisão de alguns conceitos básicos como o arranjo de subestações. Tal procedimento visa indicar que o tamanho da malha envolvida depende diretamente da quantidade de equipamentos ligadas a ela e também do espaçamento necessário entre esses equipamentos.

As principais expressões fechadas disponíveis nas normas vigentes são apresentadas e esses valores são comparados com resultados obtidos através da simulação computacional de dois tipos de aterramento. Para a simulação computacional, adota-se a representação dos condutores por eletrodos cilíndricos que permite avaliar o comportamento dos sistemas de aterramento em larga faixa de frequência.

É importante notar que o uso de eletrodos cilíndricos não é normalmente abordado nos cursos de graduação. A aplicação dos mesmos nos estudos de aterramento torna-se um interessante caso de aplicação e consequente uso pelos alunos em outras aplicações.

Duas configurações bem simples foram apresentadas e uma análise paramétrica do comportamento das tensões de passo e toque foi realizada. Todos os códigos computacionais empregados nas avaliações foram disponibilizados, permitindo-se assim, futuramente, correções e disseminação de uso e dos conceitos associados com os sistemas de aterramento.

5.1 Trabalhos Futuros

O presente trabalho está longe de ser exaustivo dada a complexidade e gama de aplicações. Apresenta-se a seguir alguns tópicos de possíveis desdobramentos no estudo do tema:

- Avaliação do impacto do tipo de eletrodo usado na identificação da resistividade do solo em baixas frequências;
- Avaliação do comportamento de malhas simples em situações de curto-circuito na frequência industrial e no caso da injeção de surtos de manobra ou descargas atmosféricas;
- Avaliação da segmentação dos eletrodos e do impacto da mesma nos resultados calculados para diversas gamas de frequência.

Apêndice A – Formulação por eletrodos cilíndricos

O emprego de eletrodos cilíndricos permite representar um elemento condutor imerso em meio homogêneo, linear e isotrópico de comprimento finito e podendo haver ou não uma interface com outro plano homogêneo, linear e isotrópico. O princípio básico da formulação supõe que os campos se propagam de forma dominante no modo conhecido como quase-estacionário, i.e., supõe que todos os campos podem ser representados por uma some de componentes harmônicos. Conforme mencionado anteriormente, as referências [6]-[12] apresentam maiores detalhes sobre essa formulação para representação de elementos condutores em meios genéricos e a referência [6] detalha o procedimento no caso de aplicação em sistemas de aterramento. Com isso, apresenta-se aqui apenas breve resumo das expressões de impedância transversais (que existem entre os condutores que formam o sistema de aterramento e o solo), e as impedâncias longitudinais.

O princípio da representação por eletrodos pode ser compreendido pela figura a seguir onde o condutor finito é subdivido formando-se uma cascata de elementos com comprimentos menores de forma que a suposição de uma corrente uniforme ao longo do condutor, bem como de uma injeção uniforme de corrente ao meio externo pode ser considerada. Considere também que o meio externo pode ser caracterizado por uma constante de progapação γ dada por

$$\gamma = \sqrt{j \,\omega \,\mu \,(\sigma + j \,\omega \,\varepsilon)} = \,\alpha + j \,\beta$$

Onde μ é a permeabilidade magnética do meio, ϵ a permissividade dielétrica do meio, σ a condutividade elétrica do meio, α o coeficiente de atenuação do meio, β a constante de fase do mesmo.



Figura A. 1 Formulação de um condutor por eletrodo cilíndrico. [6]

Portanto, para o pequeno eletrodo cilíndrico "extraído" do condutor original, é possível determinar as expressões dos potencias escalar elétrico e vetor magnético em um ponto genérico P a uma dada distância finita do eletrodo onde a distância entre uma das extremidades do eletrodo é dada por R₁, e a outra por R₂ e onde η é a distância entre um ponto localizado na superfície do eletrodo e na metade do comprimento do mesmo e P. O potencial escalar elétrico médio entre o ponto P e o eletrodo é dado por

$$\varphi = \frac{I_t e^{j\omega t}}{4\pi\ell(\sigma + j\omega\varepsilon)} e^{-\gamma\eta} \ln N_f$$

onde σ é a condutividade do meio, ϵ é a permitividade do meio e N_f é dada por

$$N_f = \frac{R_1 + R_2 + \ell}{R_1 + R_2 - \ell}$$

e I_t é a corrente transversal injetada pelo eletrodo no meio externo. Empregando-se o mesmo raciocínio é possível definir o potencial vetor magnético por

$$\bar{A} = \frac{\mu I_L e^{-\gamma \eta}}{4\pi \ell} \ln N_f \left[(x_2 - x_1)\widehat{a_x} + (y_2 - y_1)\widehat{a_y} + (z_2 - z_1)\widehat{a_z} \right]$$

onde x₁, y₁, z₁ são as coordenadas do ponto médio na superfície do eletrodo, e x₂, y₂, z₂ as coordenadas do ponto P. A Fig. A.2 ilustra as distâncias envolvidas para o caso de apenas um eletrodo cilíndrico em meio homogêneo e uniforme e onde $\ell = L_s$.



Figura A. 2 Eletrodo cilíndrico imerso em meio uniforme. [6]

Considere, agora, dois eletrodos cilíndricos em posições arbitrárias entre si e imersos em meio dispersivo, conforme mostra a Fig. A.3. É suposto nesse caso a existência de um segundo meio sem perdas com uma interface plana em relação ao meio envolvendo ao eletrodo, e com características em termos de permissividade e permeabilidade magnética tias que o método das imagens possa ser aplicado. Seguindo-se o mesmo formalismo mencionado acima é possível obter a seguinte expressão para a impedância mútua transversal entre os eletrodos Z_{tm} dada por

$$Z_{tm} = \frac{1}{4 \pi L_s L_r(\sigma + j \omega \varepsilon)} e^{-\gamma \eta} \int_0^{L_r} \ln(N_f) dl + \int_0^{L_r} \ln(N_{f \ (imagem \ L_s)}) dl$$

e a impedância transversal própria Z_{tp} é dada por

$$Z_{tp1} = \frac{1}{2 \pi L_s (\sigma + j \omega \varepsilon)} \left[ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{bs}{L_s}\right)^2}}{\left(\frac{bs}{L_s}\right)} \right) + \left(\frac{bs}{L_s}\right) - \sqrt{1 + \left(\frac{bs}{L_s}\right)^2} \right]$$
$$Z_{tp} = Z_{tp1} + \frac{1}{4 \pi L_s L_s (\sigma + j \omega \varepsilon)} e^{-\gamma \eta} \int_0^{L_s} ln(N_{f (imagem L_s)}) dl$$

onde bs é o raio do eletrodos, e L_s e L_r são os comprimentos de cada eletrodo.



Figura A. 3 Dois eletrodos cilíndricos imerso em meio uniforme. [6]

Para o caso da impedâncias longitudinal mútua, a expressão é a seguinte

$$Z_{lm} = \frac{j \,\omega \,\mu \cos \theta}{4 \,\pi} e^{-\gamma \,\eta} \int_0^{L_r} \ln(N_f) \,dl$$

e no caso da impedâncias longitudinal própria

$$Z_{lp} = L_s Z_{int} + \frac{j \omega \mu}{4 \pi} \left[ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{bs}{Ls}\right)^2}}{\left(\frac{bs}{Ls}\right)} \right) + \left(\frac{bs}{Ls}\right) - \sqrt{1 + \left(\frac{bs}{Ls}\right)^2} \right]$$

sendo a impedâcia interna "Zint", para um condutor composto por um único material, ou seja, sem alma de aço:

$$Z_{int} = \frac{1}{2 \pi b_s} \times \frac{I_0(\rho)}{I_1(\rho)} \sqrt{\frac{j \,\omega_{eletrodo}}{\sigma_{eletrodo}}}$$

onde $\rho = \sqrt{j \omega \mu_{eletrodo} \sigma_{eletrodo}}$, $I_0(\rho)$, $I_1(\rho)$ são Funções de Bessel da espécie I, de ordem 0 e 1 respectivamente, avaliadas em ρ .

Calculadas as impedâncias longitudinais e transversais do sistema de eletrodos, e considerando que os eletrodos sejam suficientemente pequenos, pode-se: representar o eletrodo por um circuito "T" equivalente.



Figura A. 4 Circuito 'T' equivalente do eletrodo. [6]

Para um caso de 'm' eletrodos e 'n' nós:

$$Y_{eq} = \frac{1}{2} ([D] - [C])[Z_t]^{-1}[B] - ([D] + [C])[Z_l]^{-1}[A]$$

$$\psi = [Y_{eq}]^{-1}I_e$$

$$I_{l1} = \left(-[Z_l]^{-1}[A] - \frac{1}{2}[Z_l]^{-1}[B]\right) \psi$$

$$I_{l2} = \left(+[Z_l]^{-1}[A] - \frac{1}{2}[Z_l]^{-1}[B]\right) \psi$$

$$I_l = \frac{I_{l1} - I_{l2}}{2}$$

$$I_t = I_{l1} + I_{l2}$$

Lei de Formação das matrizes:

Matriz A: -1 se o nó k for o ponto 1 do eletrodo i, +1 se k for o ponto 2 de i e 0 nos demais casos.

Matriz B: 0,5 se o nó k for o ponto 1 ou o ponto 2 do eletrodo i, demais casos 0.

Matriz C: 1 se o nó i for o ponto 1 do eletrodo j, demais casos 0.

Matriz D: 1 se o nó i for o ponto 2 do eletrodo j, demais casos 0.

Apêndice B – Código computacional para a configuração em cruz

Nesse apêndice é apresentado o arquivo escrito na Wolfram Language empregado para as avaliações presentes nesse documento.



Definindo os pontos (P1 e P2) de cada eletrodo.

(* Eletrodo E1 *)E1 = {{-1, 0, -0.5}, {0, 0, -0.5}}; (* Eletrodo E2 *)E2 = {{1, 0, -0.5}, {0, 0, -0.5}}; (* Eletrodo E3 *)E3 = {{0, 0, -0.5}, {0, 1, -0.5}}; (* Eletrodo E1 *)E4 = {{0, 0, -0.5}, {0, -1, -0.5}};

Definindo os nós (N1 a N5).

 $(* N \circ 1 *) N1 = \{-1, 0, -0.5\};$ $(* Nó 2 *) N2 = \{1, 0, -0.5\};$ $(* Nó 3 *) N3 = \{0, 1, -0.5\};$ $(* No 4 *) N4 = \{0, 0, -0.5\};$ $(* N \circ 5 *) N = \{0, -1, -0.5\};$

Cálculo das Impedâncias próprias e mútuas.

Definindo os parâmetros.

 $\sigma s = 0.001$; (* Condutividade elétrica do solo em S/m *) $\sigma e = 10^8$; (* Condutividade elétrica do eletrodo em S/m *) $\Delta i = 11.7 \times 10^{-3}$; (* Variação da Imitância do solo em S/m *) $\alpha = 0.7$; (* Parâmetro que determina a dependência da Imitância com a frequência - Adimencional *) $\mu s = 4. \pi 10^{-7}$; (* Permeabilidade magnética do solo em N/A² *) $\mu \text{e}=4.\;\pi\;10^{\,\text{h}}-7\;;\,(*\;\text{Permeabilidade magnética do eletrodo em}\;\text{N/A}^2\;\;*)$ $\epsilon = 8.854 \times 10^{-12}$; (* Permissividade dielétrica em F/m*) bs = 0.001; (* Raio do condutor em m *) Ls = Lr = 1 ; (* Comprimento dos eletrodos em m *) $f = 10^{-15}$; (*Hz*)

Cálculo das impedâncias mútuas longitudinais

$$R121 = \sqrt{\left(\left(\frac{E1[[1, 1]] + E1[[2, 1]]}{2} - E2[[1, 1]]\right)^{2} + \left(\frac{E1[[1, 2]] + E1[[2, 2]]}{2} - E2[[1, 2]]\right)^{2}\right)};$$

 $Rim 121 = \sqrt{(2 Abs [E1[[1, 3]])^2 + R121^2)};$

(* R121 refere-se ao cálculo da distância entre o centro do eletrodo 1 (1° índice) para o eletrodo 2 (2° índice) na extremidade 1 (3° índice) *) (* Rim121 refere-se à distância do eletrodo para a imagem *)

R122 =
$$\sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 1]]}{2} - \text{E2}[[2, 1]]\right)^2 + \left(\frac{\text{E1}[[1, 2]] + \text{E1}[[2, 2]]}{2} - \text{E2}[[2, 2]]\right)^2\right)};$$

 $Rim 122 = \sqrt{(2 Abs [E1[[1, 3]])^2 + R122^2)};$ R131 = $\sqrt{\left(\left(\frac{E1[[1, 1]] + E1[[2, 1]]}{2} - E3[[1, 1]]\right)^2 + \right)^2}$ $\left(\frac{\texttt{E1[[1,2]]}+\texttt{E1[[2,2]]}}{2}-\texttt{E3[[1,2]]}\right)^2\right);$ Rim131 = $\sqrt{(2 \text{ Abs}[E1[[1, 3]])^2 + R131^2)};$

$$\begin{split} \text{R132} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 1]]}{2} - \text{E3}[[2, 1]]\right)^2 + \text{C3}[[2, 1]]\right)^2};\\ \text{Rim132} &= \sqrt{\left(2 \text{ Abs}\left[\text{E1}[[1, 3]]\right]\right)^2 + \text{R132}^2};\\ \text{R141} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 1]]}{2} - \text{E4}[[1, 1]]\right)^2 + \text{C4}\left([1, 1]\right]\right)^2};\\ \text{Rim141} &= \sqrt{\left(2 \text{ Abs}\left[\text{E1}[[1, 3]]\right]\right)^2 + \text{R141}^2};\\ \text{R142} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)};\\ \text{Rim142} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)};\\\\ \text{Rim142} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)};\\\\ \text{Rim231} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E3}[[1, 1]]\right)^2 + \text{R231}^2};\\\\ \text{R232} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E3}[[2, 1]]\right)^2\right)};\\\\ \text{Rim231} &= \sqrt{\left(2 \text{ Abs}\left[\text{E1}[[1, 3]]\right]\right)^2 + \text{R231}^2};\\\\ \text{R232} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E3}[[2, 2]]\right)^2\right)};\\\\\\ \text{Rim232} &= \sqrt{\left(2 \text{ Abs}\left[\text{E1}[[1, 3]]\right]\right)^2 + \text{R232}^2};\\\\ \text{R241} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[1, 2]]\right)^2\right)};\\\\\\ \text{Rim241} &= \sqrt{\left(2 \text{ Abs}\left[\text{E1}[[1, 3]]\right]\right)^2 + \text{R241}^2};\\\\\\ \text{R242} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 1]]\right)^2\right)^2},\\\\\\ \text{Rim241} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)};\\\\\\\\ \text{Rim242} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\ \text{Rim242} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\ \text{Rim242} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\ \text{Rim242} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\ \text{Rim242} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\\\ \text{Rim242} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\ \text{Rim242} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\\\ \text{Rim241} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\\\ \text{Rim241} &= \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^2\right)^2};\\\\\\\\\\\\ \text{Rim241} &= \sqrt{\left(\frac{\text{E2}$$

$$\left(\frac{\text{E3}[[1, 2]] + \text{E3}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[1, 2]]\right)^{2}\right);$$

Rim341 = $\sqrt{(2 \text{ Abs}[\text{E1}[[1, 3]]])^{2} + \text{R341}^{2}};$
R342 = $\sqrt{\left(\left(\frac{\text{E3}[[1, 1]] + \text{E3}[[2, 1]]}{2} - \text{E4}[[2, 1]]\right)^{2} + \left(\frac{\text{E3}[[1, 2]] + \text{E3}[[2, 2]]}{2} - \text{E4}[[2, 2]]\right)^{2}\right);}$

Rim342 = $\sqrt{(2 \text{ Abs}[E1[[1, 3]])^2 + R342^2)};$

Nf12 =	R121 + R122 + Ls		Rim121 + Rim122 + Ls	
		; Nfim12 =	;	;
	R121 + R122 - Ls	,	Rim121 + Rim122 - Ls	
Nf13 =	R131 + R132 + Ls	. Nfim12 -	Rim131 + Rim132 + Ls	
	R131 + R132 - Ls	; NIIIII =	Rim131 + Rim132 - Ls	
Nf14 =	R141 + R142 + Ls	. Nfim14 -	Rim141 + Rim142 + Ls	;
	R141 + R142 - Ls	; NI 11114 =	Rim141 + Rim142 - Ls	
Nf23 =	R231 + R232 + Ls	. Nfim22 -	Rim231 + Rim232 + Ls	;
	R231 + R232 - Ls	; NI 11123 =	Rim231 + Rim232 - Ls	
Nf24 =	R241 + R242 + Ls	. Nfim24 -	Rim241 + Rim242 + Ls	;
	R241 + R242 - Ls	, NI 11124 -	Rim241 + Rim242 - Ls '	
N£34 =	R341 + R342 + Ls	• Nfim24 -	Rim341 + Rim342 + Ls	;
	R341 + R342 - Ls	, NI 11134 -	Rim341 + Rim342 - Ls	

$$\begin{array}{l} \theta 13 = \theta 14 = \theta 23 = \theta 24 = \frac{\pi}{2}; \mbox{ (* Ângulo entre os eletrodos perpendiculares *)} \\ \theta 12 = \theta 34 = 0; \mbox{ (* ângulo entre os eletrodos alinhados *)} \\ \omega = 2 \pi f; \mbox{ (* frequência angular *)} \\ \gamma = \sqrt{\mathbf{j} \, \omega \, \mu \mathrm{e} \, (\sigma \mathrm{e} + \mathbf{j} \, \omega \, \epsilon)}; \mbox{ (* cálculo do coeficiente de propagação *)} \end{array}$$

$$\eta 12 = \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 1]]}{2} - \frac{\text{E2}[[1, 1]] + \text{E2}[[2, 1]]}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\text{E1}[[1, 2]] + \text{E1}[[2, 2]]}{2} - \frac{\text{E2}[[1, 2]] + \text{E2}[[2, 2]]}{2}\right)^{2}\right);$$

$$(* \text{ Cálculo da distância entre os pontos centrais dos eletrodos 1 e 2 *})$$

$$\eta 13 = \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 1]]}{2} - \frac{\text{E3}[[1, 1]] + \text{E3}[[2, 1]]}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\text{E1}[[1, 2]] + \text{E1}[[2, 2]]}{2} - \frac{\text{E3}[[1, 2]] + \text{E3}[[2, 2]]}{2}\right)^{2}\right);$$

$$\eta 14 = \sqrt{\left(\left(\frac{\text{E1}[[1, 1]] + \text{E1}[[2, 1]]}{2} - \frac{\text{E4}[[1, 1]] + \text{E4}[[2, 1]]}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\text{E1}[[1, 2]] + \text{E1}[[2, 2]]}{2} - \frac{\text{E4}[[1, 2]] + \text{E4}[[2, 2]]}{2}\right)^{2}\right);$$

$$\eta 23 = \sqrt{\left[\left(\frac{E2[[1, 1]] + E2[[2, 1]]}{2} - \frac{E3[[1, 1]] + E3[[2, 1]]}{2}\right)^{2} + \left(\frac{E2[[1, 2]] + E2[[2, 2]]}{2} - \frac{E3[[1, 2]] + E3[[2, 2]]}{2}\right)^{2}\right); \\ \eta 24 = \sqrt{\left[\left(\frac{E2[[1, 1]] + E2[[2, 1]]}{2} - \frac{E4[[1, 1]] + E4[[2, 1]]}{2}\right)^{2} + \left(\frac{E2[[1, 2]] + E2[[2, 2]]}{2} - \frac{E4[[1, 2]] + E4[[2, 2]]}{2}\right)^{2}\right); \\ \eta 34 = \sqrt{\left[\left(\frac{E3[[1, 1]] + E3[[2, 1]]}{2} - \frac{E4[[1, 2]] + E4[[2, 2]]}{2}\right)^{2}\right); \\ z = z 121 = \frac{\mathbf{j} \ \omega \ \mu e \ Cos[\theta 12]}{4 \ \pi} \ e^{-\gamma \eta 12} \int_{0}^{Lx} Log[Nf12] \ d1; \\ (* \ Cálculo \ da \ impedância \ longitudinal \ entre \ os \ eletrodos \ 1 \ e \ 2 \ *\right) \\ z = z 131 = \frac{\mathbf{j} \ \omega \ \mu e \ Cos[\theta 13]}{2} \ e^{-\gamma \eta 13} \int_{0}^{Lx} Log[Nf13] \ d1; \\ \end{cases}$$

$$z113 = z131 = \frac{\mathbf{j} \ \omega \ \mu e \ \cos[\theta 13]}{4 \ \pi} \ e^{-\gamma \ \eta 13} \ \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf13}] \ dl;$$

$$z114 = z141 = \frac{\mathbf{j} \ \omega \ \mu e \ \cos[\theta 14]}{4 \ \pi} \ e^{-\gamma \ \eta 14} \ \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf14}] \ dl;$$

$$z123 = z132 = \frac{\mathbf{j} \ \omega \ \mu e \ \cos[\theta 23]}{4 \ \pi} \ e^{-\gamma \ \eta 23} \ \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf23}] \ dl;$$

$$z124 = z142 = \frac{\mathbf{j} \ \omega \ \mu e \ \cos[\theta 24]}{4 \ \pi} \ e^{-\gamma \ \eta 24} \ \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf24}] \ dl;$$

$$z134 = z143 = \frac{\mathbf{j} \ \omega \ \mu e \ \cos[\theta 34]}{4 \ \pi} \ e^{-\gamma \ \eta 34} \ \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf24}] \ dl;$$

Cálculo das impedâncias próprias longitudinais

$$\rho = bs \sqrt{\mathbf{j}} \omega \mu e \sigma e \; ; \; (* \text{ cálculo da resistividade do eletrodo } *)$$
$$Zlint = \frac{1}{2 \pi bs} \; \frac{BesselI[0, \rho]}{BesselI[1, \rho]} \; \sqrt{\frac{\mathbf{j} \omega \mu e}{\sigma e}} \; ;$$

(* cálculo da impedância interna do eletrodo *)

$$zll1 = zl22 = zl33 = zl44 = Ls Zlint + \frac{j \omega \mu e}{4 \pi} \left(Log \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{bs}{Ls}\right)^2}}{\frac{bs}{Ls}} \right] + \frac{bs}{Ls} - \sqrt{1 + \left(\frac{bs}{Ls}\right)^2} \right);$$

(* Cálculo da impedância própria longitudinal conforme formulação em [1] *)

Cálculo das impedâncias próprias transversais

ηim = 2 E1[[1, 3]];
(* Cálculo da distância entre o centro do eletrodo e sua imagem *)

$$Nfim = \frac{\sqrt{\eta im^2 + \left(\frac{Ls}{2}\right)^2} + \sqrt{\eta im^2 + \left(\frac{Ls}{2}\right)^2} + Ls}{\sqrt{\eta im^2 + \left(\frac{Ls}{2}\right)^2} + \sqrt{\eta im^2 + \left(\frac{Ls}{2}\right)^2} - Ls};$$

$$zt11 =$$

$$zt22 = zt33 = zt44 = \frac{1}{2 \pi \operatorname{Ls} (\sigma s + \mathbf{j} \omega \varepsilon)} \left(\operatorname{Log} \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{bs}}{\mathrm{Ls}}\right)^2}}{\frac{\mathrm{bs}}{\mathrm{Ls}}} \right] + \frac{\mathrm{bs}}{\mathrm{Ls}} - \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{bs}}{\mathrm{Ls}}\right)^2} \right] + \frac{1}{4 \pi \operatorname{Ls} \operatorname{Ls} (\sigma s + \mathbf{j} \omega \varepsilon)} \varepsilon^{-\gamma \eta \mathrm{im}} \int_0^{\mathrm{Ls}} \operatorname{Log} [\operatorname{Nfim}] dl;$$

(* Cálculo da impedância própria transversal conforme formulação em [1] *)

Cálculo das impedâncias mútuas transversais

$$\begin{aligned} zt12 &= zt21 = \frac{1}{4 \pi \text{Ls Lr} (\sigma s + \mathbf{j} \omega \epsilon)} e^{-Y \eta 12} \left(\int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf12}] d1 + \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nfim12}] d1 \right); \\ (* Cálculo da impedância mútua transversal conforme [1]*) \\ zt13 &= zt31 = \frac{1}{4 \pi \text{Ls Lr} (\sigma s + \mathbf{j} \omega \epsilon)} e^{-Y \eta 13} \left(\int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf13}] d1 + \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nfim13}] d1 \right); \\ zt14 &= zt41 = \frac{1}{4 \pi \text{Ls Lr} (\sigma s + \mathbf{j} \omega \epsilon)} e^{-Y \eta 14} \left(\int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf14}] d1 + \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nfim14}] d1 \right); \\ zt23 &= zt32 = \frac{1}{4 \pi \text{Ls Lr} (\sigma s + \mathbf{j} \omega \epsilon)} e^{-Y \eta 23} \left(\int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf23}] d1 + \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nfim23}] d1 \right); \\ zt24 &= zt42 = \frac{1}{4 \pi \text{Ls Lr} (\sigma s + \mathbf{j} \omega \epsilon)} e^{-Y \eta 24} \left(\int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nf24}] d1 + \int_{0}^{Lr} \text{Log}[\text{Nfim24}] d1 \right); \\ z1 &= \{\{z111, z112, z113, z114\}, \{z121, z122, z123, z124\}, \\ \{z131, z132, z133, z134\}, \{z141, z142, z143, z144\}\}; \\ (* \text{ Criando matriz de impedâncias longitudinais *) \\ \text{MatrixForm}[\text{N}[\text{Re}[\text{Z1}]]] (* \text{Exibindo só a parte real da matriz *) \\ zt = \{\{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \{zt21, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \\ zt = \{zt11, zt22, zt13, zt14\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \\ zt = \{zt11, zt22, zt23, zt24\}, \\ zt = \{zt11, zt12, zt13, zt14\}, \\ zt = \{zt11, zt22, zt13, zt14\}, \\ zt = \{zt11, zt22, zt13, zt1$$

{zt31, zt32, zt33, zt34}, {zt41, zt42, zt43, zt44}}; (* Criando matriz de impedâncias transversais *) MatrixForm[N[Re[Zt]]] (* Exibindo só a parte real da matriz *)

3. Montando a Matriz A

```
A = ConstantArray[0, {4, 5}]; (* Gerando o tamanho da matriz 'A' *)
A[[1, 1]] = If[E1[[1, 1]] == N1[[1]] \&\& E1[[1, 2]] == N1[[2]],
   -1, If [E1[[2, 1]] == N1[[1]] && E1[[2, 2]] == N1[[2]], 1, 0]];
(* A matriz 'A' obedece a lei de formação:
  -1 se o nó k for o ponto 1 do eletrodo i,
+1 se k for o ponto 2 de i e 0 caso contrário *)
A[[1, 2]] = If[E1[[1, 1]] == N2[[1]] \&\& E1[[1, 2]] == N2[[2]],
   -1, If [E1[[2,1]] == N2[[1]] && E1[[2,2]] == N2[[2]], 1, 0]];
A[[1, 3]] = If[E1[[1, 1]] == N3[[1]] \&\& E1[[1, 2]] == N3[[2]], -1,
   If[E1[[2,1]] == N3[[1]] && E1[[2,2]] == N3[[2]], 1, 0]];
A[[1, 4]] = If[E1[[1, 1]] == N4[[1]] \&\& E1[[1, 2]] == N4[[2]], -1,
   If[E1[[2,1]] == N4[[1]] \&\& E1[[2,2]] == N4[[2]], 1, 0]];
A[[1, 5]] = If[E1[[1, 1]] == N5[[1]] \&\& E1[[1, 2]] == N5[[2]], -1,
   If[E1[[2, 1]] == N5[[1]] \& E1[[2, 2]] == N5[[2]], 1, 0]];
A[[2, 1]] = If[E2[[1, 1]] == N1[[1]] \&\& E2[[1, 2]] == N1[[2]], -1,
   If[E2[[2,1]] == N1[[1]] \&\& E2[[2,2]] == N1[[2]], 1, 0]];
A[[2,2]] = If[E2[[1,1]] == N2[[1]] \& E2[[1,2]] == N2[[2]], -1,
   If[E2[[2,1]] == N2[[1]] \&\& E2[[2,2]] == N2[[2]], 1, 0]];
A[[2, 3]] = If[E2[[1, 1]] == N3[[1]] \&\& E2[[1, 2]] == N3[[2]], -1,
   If[E2[[2,1]] == N3[[1]] && E2[[2,2]] == N3[[2]],1,0]];
A[[2, 4]] = If[E2[[1, 1]] == N4[[1]] \&\& E2[[1, 2]] == N4[[2]], -1,
   If[E2[[2,1]] == N4[[1]] \&\& E2[[2,2]] == N4[[2]], 1, 0]];
A[[2, 5]] = If[E2[[1, 1]] == N5[[1]] \&\& E2[[1, 2]] == N5[[2]], -1,
   If[E2[[2,1]] == N5[[1]] \&\& E2[[2,2]] == N5[[2]], 1, 0]];
A[[3, 1]] = If[E3[[1, 1]] == N1[[1]] \&\& E3[[1, 2]] == N1[[2]], -1,
   If[E3[[2,1]] == N1[[1]] \&\& E3[[2,2]] == N1[[2]], 1, 0]];
A[[3, 2]] = If[E3[[1, 1]] == N2[[1]] \&\& E3[[1, 2]] == N2[[2]], -1,
   If[E3[[2,1]] == N2[[1]] \&\& E3[[2,2]] == N2[[2]], 1, 0]];
A[[3, 3]] = If[E3[[1, 1]] == N3[[1]] \&\& E3[[1, 2]] == N3[[2]], -1,
   If[E3[[2,1]] == N3[[1]] \&\& E3[[2,2]] == N3[[2]], 1, 0]];
A[[3, 4]] = If[E3[[1, 1]] == N4[[1]] \&\& E3[[1, 2]] == N4[[2]], -1,
   If[E3[[2,1]] == N4[[1]] \&\& E3[[2,2]] == N4[[2]], 1, 0]];
A[[3, 5]] = If[E3[[1, 1]] == N5[[1]] \&\& E3[[1, 2]] == N5[[2]], -1,
   If[E3[[2,1]] == N5[[1]] && E3[[2,2]] == N5[[2]],1,0]];
A[[4, 1]] = If[E4[[1, 1]] == N1[[1]] \&\& E4[[1, 2]] == N1[[2]], -1,
   If[E4[[2,1]] == N1[[1]] && E4[[2,2]] == N1[[2]], 1, 0]];
A[[4, 2]] = If[E4[[1, 1]] == N2[[1]] \&\& E4[[1, 2]] == N2[[2]], -1,
   If[E4[[2,1]] == N2[[1]] \&\& E4[[2,2]] == N2[[2]], 1, 0]];
A[[4, 3]] = If[E4[[1, 1]] == N3[[1]] \&\& E4[[1, 2]] == N3[[2]], -1,
   If[E4[[2,1]] == N3[[1]] \&\& E4[[2,2]] == N3[[2]], 1, 0]];
A[[4, 4]] = If[E4[[1, 1]] == N4[[1]] \&\& E4[[1, 2]] == N4[[2]], -1,
   If[E4[[2,1]] == N4[[1]] \&\& E4[[2,2]] == N4[[2]], 1, 0]];
A[[4, 5]] = If[E4[[1, 1]] == N5[[1]] \&\& E4[[1, 2]] == N5[[2]], -1,
   If[E4[[2,1]] == N5[[1]] \&\& E4[[2,2]] == N5[[2]], 1, 0]];
```

```
MatrixForm[A]
```

```
\left(\begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)
```

4. Montando a matriz B

 $B = \frac{-1}{2} \operatorname{Abs}[A]; (* A \text{ matriz 'B' obedece a lei de formação: -0,} 5 se o nó k for o ponto 1 ou o ponto 2 de i e 0 caso contrário *)$

MatrixForm[B] (* Exibindo 'B' em formato de matriz *)

 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. Montando a matriz c

MatrixForm[c]

6. Montando a matriz d

```
d = ConstantArray[0, {5, 4}];
(* construindo uma matriz de zeros com a dimensão de 'c' *)
d[[1, 1]] = If[E1[[2, 1]] == N1[[1]] && E1[[2, 2]] == N1[[2]], -1, 0];
(* montando a matriz 'd' que obedece a lei de
formação: -1 se nó 'i' for o ponto 2 do eletrodo 'j', 0 caso contrário *)
d[[1, 2]] = If[E2[[2, 1]] == N1[[1]] \&\& E2[[2, 2]] == N1[[2]], -1, 0];
d[[1, 3]] = If[E3[[2, 1]] == N1[[1]] \&\& E3[[2, 2]] == N1[[2]], -1, 0];
d[[1, 4]] = If[E4[[2, 1]] == N1[[1]] \&\& E4[[2, 2]] == N1[[2]], -1, 0];
d[[2, 1]] = If[E1[[2, 1]] == N2[[1]] \&\& E1[[2, 2]] == N2[[2]], -1, 0];
d[[2, 2]] = If[E2[[2, 1]] == N2[[1]] \&\& E2[[2, 2]] == N2[[2]], -1, 0];
d[[2, 3]] = If[E3[[2, 1]] == N2[[1]] \&\& E3[[2, 2]] == N2[[2]], -1, 0];
d[[2, 4]] = If[E4[[2, 1]] == N2[[1]] \&\& E4[[2, 2]] == N2[[2]], -1, 0];
d[[3,1]] = If[E1[[2,1]] == N3[[1]] && E1[[2,2]] == N3[[2]], -1, 0];
d[[3, 2]] = If[E2[[2, 1]] == N3[[1]] \&\& E2[[2, 2]] == N3[[2]], -1, 0];
d[[3, 3]] = If[E3[[2, 1]] == N3[[1]] \&\& E3[[2, 2]] == N3[[2]], -1, 0];
d[[3, 4]] = If[E4[[2, 1]] == N3[[1]] \&\& E4[[2, 2]] == N3[[2]], -1, 0];
d[[4, 1]] = If[E1[[2, 1]] == N4[[1]] \&\& E1[[2, 2]] == N4[[2]], -1, 0];
d[[4, 2]] = If[E2[[2, 1]] == N4[[1]] \&\& E2[[2, 2]] == N4[[2]], -1, 0];
d[[4, 3]] = If[E3[[2, 1]] == N4[[1]] \&\& E3[[2, 2]] == N4[[2]], -1, 0];
d[[4, 4]] = If[E4[[2, 1]] == N4[[1]] \&\& E4[[2, 2]] == N4[[2]], -1, 0];
d[[5, 1]] = If[E1[[2, 1]] == N5[[1]] \&\& E1[[2, 2]] == N5[[2]], -1, 0];
d[[5, 2]] = If[E2[[2, 1]] == N5[[1]] \&\& E2[[2, 2]] == N5[[2]], -1, 0];
d[[5, 3]] = If[E3[[2, 1]] == N5[[1]] \&\& E3[[2, 2]] == N5[[2]], -1, 0];
d[[5, 4]] = If[E4[[2, 1]] == N5[[1]] \&\& E4[[2, 2]] == N5[[2]], -1, 0];
```

MatrixForm[d]

7. Montando o Vetor de injeções de correntes externas

Ie = {{0}, {0}, {0}, {1}, {0}}; (* Injeção de corrente de 1 A somente em N4 *)

8. Cálculo do Yeq

```
Yeq = \frac{1}{2} ((d-c) . (Inverse[Zt] .B)) - (d+c) . (Inverse[Zl]).A;
(* Cálculo da matriz de admitância *)
MatrixForm[Re[Yeq]]
(* erando em formato de matriz a parte real da matriz de admitância *)
                             -0.000020372542302166587^{\circ} -0.000030033739045472984^{\circ}
    314.15949925070873`
 -0.000020372542302166583
                              314.15949925070873`
                                                         -0.000030033739045472988`
  -0.00003003373904547298`
                             -0.00003003373904547299`
                                                            314.15949925070873`
    -314.15911190727024`
                              -314.15911190727024`
                                                           -314.15911190727024`
 -0.000030033739045472977` -0.000030033739045472984` -0.00002037254230216659`
```

9. Vetor de Potenciais nos nós

```
\begin{aligned} & \texttt{Clear}[\psi] \ensuremath{\,;} \ (* \ \texttt{Limpando} \ a \ \texttt{variável} \ \psi \ *) \\ & \psi = \texttt{Inverse}[\texttt{Yeq}] \ .\texttt{Ie} \ensuremath{;} \ (* \ \texttt{Calculando} \ os \ \texttt{potenciais} \ *) \end{aligned}
```

 $MatrixForm[\psi]$

(4072.94 - 0.448995 i 4072.94 - 0.448995 i 4072.94 - 0.448995 i 4072.94 - 0.448995 i 4072.94 - 0.448995 i

10. Cálculo das correntes longitudinais e transversais

Ill =
$$\left(-\text{Inverse}[Z1] \cdot A - \frac{1}{2} \text{Inverse}[Zt] \cdot B\right) \cdot \psi;$$

Il2 = $\left(\text{Inverse}[Z1] \cdot A - \frac{1}{2} \text{Inverse}[Zt] \cdot B\right) \cdot \psi;$
Il = $\frac{\text{Ill} - \text{Il2}}{2};$ (* Cálculo da corrente longitudinal *)

```
MatrixForm[Re[I1]]
```

(* Visualizando em formato de matriz somente a parte real *)

```
(-1.25)
-1.25
1.25
1.25
```

It = Il1 + Il2; (* Cálculo das correntes transversais *)

MatrixForm[Re[It]] (* visualização em formato de matriz da parte real *)

```
\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}
```

11. Cálculo dos Potenciais do Solo

```
\begin{split} t &= 10; \; (* \; \text{analisando o potencial após 10s *}) \\ \text{Clear}[\psi]; \; (* \; \text{Limpando a variável } \psi \; *) \\ \psi[\text{x}_{,} \; \text{y}_{,} \; \text{z}_{:} : 0.0] \; := \\ & \frac{\text{It} \; e^{j \; \omega \; t}}{4 \; \pi \; \text{Ls} \; (\sigma \text{s} + j \; \omega \; \epsilon)} \; e^{-Y \; \sqrt{\left(\frac{\text{El}[(1,1]] \cdot \text{El}[(2,1]]}{2} - x\right)^{2} + \left(\frac{\text{El}[(1,2]] \cdot \text{El}[(2,2]]}{2} - Y\right)^{2} + \left(\frac{\text{El}[(1,3]] \cdot \text{El}[(2,3]]}{2} - z\right)^{2}}} \\ & \text{Log}\Big[ \left( \sqrt{\left(\text{El}[[1, 1]] - x\right)^{2} + \left(\text{El}[[1, 2]] - y\right)^{2} + \left(\text{El}[[1, 3]] - z\right)^{2}} \right. + \end{split}
```

$$\begin{split} & \sqrt{\left(\text{E1}\left[\left[2,1\right]\right]-\text{x}\right)^{2}+\left(\text{E1}\left[\left[2,2\right]\right]-\text{y}\right)^{2}+\left(\text{E1}\left[\left[2,3\right]\right]-\text{z}\right)^{2}}+\text{Ls}\right)}/\\ & \left(\sqrt{\left(\text{E1}\left[\left[1,1\right]\right]-\text{x}\right)^{2}+\left(\text{E1}\left[\left[1,2\right]\right]-\text{y}\right)^{2}+\left(\text{E1}\left[\left[1,3\right]\right]-\text{z}\right)^{2}}+\\ & \sqrt{\left(\text{E1}\left[\left[2,1\right]\right]-\text{x}\right)^{2}+\left(\text{E1}\left[\left[2,2\right]\right]-\text{y}\right)^{2}+\left(\text{E1}\left[\left[2,3\right]\right]-\text{z}\right)^{2}}-\text{Ls}\right)\right]+}\\ & \frac{\text{Tt}e^{\frac{3}{9}\cdot \text{t}}}{4\pi\text{Ls}\left(\sigmas+\frac{1}{9}\,\sigma\varepsilon\right)}e^{-\gamma}\sqrt{\frac{\left(\frac{\text{E1}\left[\left[1,1\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[1,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[1,3\right]\right]-z\right)^{2}}+\\ & \sqrt{\left(\text{E2}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}}+\\ & \sqrt{\left(\text{E2}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E2}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E2}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E2}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E2}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E2}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E3}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E3}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E3}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E3}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E3}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E3}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E3}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E4}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E4}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E4}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+\\ & \sqrt{\left(\text{E4}\left[\left[2,1\right]\right]-x\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,2\right]\right]-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left[2,3\right]\right]-z\right)^{2}+1}\\ & \sqrt{\left(\text{E4}\left[\left(2,1\right]\right)-x\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left(2,2\right]\right)-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\text{E4}\left[\left(2,$$



Export["Vcruz01.png", o1];

Apêndice C – Código computacional para a malha de aterramento

Modelagem de Sistemas de Aterramento.

1. Numerando os nós e eletrodos arbitrariamente.

Considerando a seguinte geometria da malha.



Definindo os parâmetros.

```
\sigma s = 0.001; (* Condutividade elétrica do solo em S/m *)

\sigma e = 10<sup>8</sup>; (* Condutividade elétrica do eletrodo em S/m *)

\Delta i = 11.7 \times 10^{-3}; (* Variação da Imitância do solo em S/m *)

\alpha = 0.7; (* Parâmetro que determina a

dependência da Imitância com a frequência - Adimencional *)

<math display="block">\mu s = 1; (* Permeabilidade magnética do solo em N/A<sup>2</sup> *)

\mu e = 1; (* Permeabilidade magnética do eletrodo em N/A<sup>2</sup> *)

\epsilon = 1; (* Permissividade dielétrica em F/m*)

bs = 0.01; (* Raio do condutor em m *)

Ls = Lr = 1; (* Comprimento dos eletrodos em m *)

f = 10^{-15}; (*Hz*)

Comp = 50; (* Comprimento da área *)

Larg = 50; (* Largura da área em m *)

Prof = -0.5; (*Profundidade da malha no solo em m*)
```

```
(*Início -
Diminuindo o tamanho das variáveis para não demorar nos cálculos*)
Ls = Lr = 2 ; (* Comprimento dos eletrodos em m *)
Comp = 8; (* Comprimento da área *)
Larg = 4; (* Largura da área em m *)
Am = 4; (* espaçamento da malha em m *)
(*Término -
Diminuindo o tamanho das variáveis para não demorar nos cálculos*)
```

Criando vetor nulo de tamanho igual ao número de eletrodos.

$$\texttt{Eletrodos} = \texttt{ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\texttt{Comp}}{\texttt{Ls}} \right) \left(\frac{\texttt{Larg}}{\texttt{\Delta m}} + 1 \right) + \left(\frac{\texttt{Larg}}{\texttt{Ls}} \right) \left(\frac{\texttt{Comp}}{\texttt{\Delta m}} + 1 \right), 1 \right\} \right];$$

Criando vetor nulo com tamanho igual ao número das posições das extremidades dos eletrodos, dos eletrodos horizontais e verticais respectivamente.

$$\begin{split} & \text{Ex1} = \text{Ex2} = \text{Ey1} = \text{Ey2} = \text{ConstantArray} \left[0, \left\{ \frac{\text{Comp}}{\text{Ls}} \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Am}} + 1 \right) + \frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} \left(\frac{\text{Comp}}{\text{Am}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & \text{Ex1h} = \text{Ex2h} = \text{Ey1h} = \text{Ey2h} = \text{ConstantArray} \left[0, \left\{ \frac{\text{Comp}}{\text{Ls}} \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Am}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & \text{Ex1v} = \text{Ex2v} = \text{Ey1v} = \text{Ey2v} = \text{ConstantArray} \left[0, \left\{ \frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} \left(\frac{\text{Comp}}{\text{Am}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ex1=Ex2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Comp}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Larg}}{\text{Am}} + \left(\frac{\text{Comp}}{\text{Ls}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Comp}}{\text{Am}} + \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Comp}}{\text{Am}} + \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Comp}}{\text{Am}} + \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Comp}}{\text{Am}} + \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Comp}}{\text{Am}} + \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right), 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Comp}}{\text{Ls}} + 1 \right\}, 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right\}, 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right\}, 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{ Ey1=Ey2=ConstantArray} \left[0, \left\{ \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right\}, 1 \right\} \right]; \\ & (* \text{Lsymbol}) = \left(\frac{\text{Larg}}{\text{Ls}} + 1 \right) \right) \\ & (* \text{Lsymbol}) = \left(\frac{\text{Lsymbol}}{\text{Lsymbol}} + 1 \right) \left(\frac{\text{Lsymbol}}{\text{Lsymbol}} + 1 \right) \left(\frac{\text{Lsymbol}}{\text{Lsymbol}} + 1 \right) \right) \\ & (* \text{Lsymbol}) = \left(\frac{\text{Lsymbol}}{\text{Lsymbol}} + 1 \right) \left$$

Calculando os vetores E.

```
Table[Ex1h[[i, 1]] = Mod[(i - 1) *Ls, Comp], {i, 1, Length[Ex1h]}];
Table[Ex1v[[i, 1]] = Quotient[(i - 1) *Ls, Larg] * Am, {i, 1, Length[Ex1v]}];
Table[Ex1[[i, 1]] = Ex1h[[i, 1]], {i, 1, Length[Ex1h]}];
Table[Ex1[[i + Length[Ex1h], 1]] = Ex1v[[i, 1]], {i, 1, Length[Ex1v]}];
Ex2 = Ex1;
Table[Ex2[[i, 1]] = Ex1[[i, 1]] +Ls, {i, 1, Length[Ex1h]}];
```

```
Table [Ey1v[[i, 1]] = Mod[(i - 1) *Ls, Larg], {i, 1, Length[Ey1v]}];
Table [Ey1h[[i, 1]] = Quotient[(i - 1) *Ls, Comp] * Am, {i, 1, Length[Ey1h]}];
Table [Ey1[[i, 1]] = Ey1h[[i, 1]], {i, 1, Length[Ey1h]}];
Table [Ey1[[i + Length[Ey1h], 1]] = Ey1v[[i, 1]], {i, 1, Length[Ey1v]}];
Ey2 = Ey1;
Table [Ey2[[i + Length[Ey2h], 1]] = Ey1v[[i, 1]] +Ls, {i, 1, Length[Ey1v]}];
```

Cálculo das Impedâncias mútuas Longitudinais

(* Cálculo do tamanho do vetor Raios*)
Raios = ImRaios = ConstantArray[0, {2 Length[Eletrodos]!
2!(Length[Eletrodos]-2)!, 1}];



$$k1 = -1;$$

 $k2 = 0;$

Cálculo do vetor "Raios".

For [i = 1, i < Length [Eletrodos], i ++,
For [j = i + 1, j < Length [Eletrodos] + 1, j ++, k1 = k1 + 2; Raios [[k1]] = $\sqrt{\left(\frac{\text{Ex1[[i]] + Ex2[[i]]}}{2} - \text{Ex1[[j]]}\right)^2 + \left(\frac{\text{Ey1[[i]] + Ey2[[i]]}}{2} - \text{Ey1[[j]]}\right)^2 \right]];
For [i = 1, i < Length [Eletrodos], i ++, For [j = i + 1,
j < Length [Eletrodos] + 1, j ++, k2 = k2 + 2; Raios [[k2]] =
<math display="block">
\sqrt{\left(\frac{\text{Ex1[[i]] + Ex2[[i]]}}{2} - \text{Ex2[[j]]}\right)^2 + \left(\frac{\text{Ey1[[i]] + Ey2[[i]]}}{2} - \text{Ey2[[j]]}\right)^2 \right]];$

Cálculo do vetor "ImRaios" - imagem.

Cálculo do tamanho do vetor "Nf"
Cálculo do vetor "Nf".

_

For
$$[i = 1, i < \text{Length}[Nf] + 1, i++,$$

 $Nf[[i]] = \frac{\text{Raios}[[k]] + \text{Raios}[[k+1]] + \text{Ls}}{\text{Raios}[[k]] + \text{Raios}[[k+1]] - \text{Ls}}; k = k+2$

Cálculo do vetor "Nfimm"

$$k = 1;$$
For [i = 1, i < Length [Nfimm] + 1, i++,
Nfimm [[i]] = $\frac{ImRaios[[k]] + ImRaios[[k + 1]] + Ls}{ImRaios[[k]] + ImRaios[[k + 1]] - Ls}; k = k + 2]$

Cálculo dos parâmetros " ω " e " γ ".

$$\begin{split} & \omega = 2 \,\pi\, {\rm f}\,; \\ & \gamma = \sqrt{\, {\rm j}\,\omega\,\mu {\rm e}\,\left(\sigma {\rm e} + {\rm j}\,\omega\,\epsilon\right)}\,\,; \end{split} \label{eq:solution_states}$$

Cálculo de " η "

$$\eta = \text{ConstantArray}\left[0, \frac{\text{Length}[\text{Raios}]}{2}\right];$$

k1 = 0;

 $For \left[i = 1, i < Length [Eletrodos], i++, For \left[j = i+1, j < Length [Eletrodos] + 1, j++, c = 1 \right] \right]$

$$k1 = k1 + 1; \eta[[k1]] = \sqrt{\left(\left(\frac{Ex1[[i]] + Ex2[[i]]}{2} - \frac{Ex1[[j]] + Ex2[[j]]}{2}\right)^{2} + \left(\frac{Ey1[[i]] + Ey2[[i]]}{2} - \frac{Ey1[[j]] + Ey2[[j]]}{2}\right)^{2}\right)^{2}\right)}$$

Cálculo dos ângulos entre os eletrodos - " $\boldsymbol{\theta}$ "

$$\begin{aligned} \theta &= \text{ConstantArray} \left[0, \frac{\text{Length} [\text{Raios}]}{2} \right]; \\ k &= 1; \\ \text{For} \left[i = 1, i < \text{Length} [\text{Eletrodos}] + 1, i + +, \\ \text{For} \left[j = i + 1, j < \text{Length} [\text{Eletrodos}] + 1, j + +, \text{If} \left[i < \text{Length} [\text{Ex1h}] + 1, \text{If} \left[j < \text{Length} [\text{Ex1h}] + 1, \theta[[k]] = 0, \theta[[k]] = \frac{\pi}{2} \right]; k = k + 1, \theta[[k]] = 0; k = k + 1 \right] \right] \right]; \end{aligned}$$

Cálculo das impedâncias mútuas longitudinais.

$$zlm = ConstantArray \left[0, \frac{Length [Raios]}{2}\right];$$

For $\left[i = 1, i < Length [zlm] + 1, i + +, zlm[[i]] = \frac{\mathbf{j} \omega \mu e Cos [\Theta[[i]]]}{4 \pi} e^{-\gamma \eta [[i]]} \int_{0}^{Lr} Log[Nf[[i]]] dl\right];$

Cálculo das impedâncias próprias longitudinais.

$$\begin{split} \rho &= \mathrm{bs}\,\sqrt{\mathbf{j}\,\omega\,\mu\mathrm{e}\,\sigma\mathrm{e}}\;;\\ \mathrm{Zlint} &= \frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{bs}}\,\frac{\mathrm{Bessell}\left[0\,,\,\rho\right]}{\mathrm{Bessell}\left[1\,,\,\rho\right]}\,\sqrt{\frac{\mathbf{j}\,\omega\,\mu\mathrm{e}}{\sigma\mathrm{e}}}\;;\\ \mathrm{zlp} &= \mathrm{Ls}\,\mathrm{Zlint} + \frac{\mathbf{j}\,\omega\,\mu\mathrm{e}}{4\,\pi}\,\left(\mathrm{Log}\Big[\frac{1+\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{bs}}{\mathrm{Ls}}\right)^2}}{\frac{\mathrm{bs}}{\mathrm{Ls}}}\Big] + \frac{\mathrm{bs}}{\mathrm{Ls}} - \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{bs}}{\mathrm{Ls}}\right)^2}\Big); \end{split}$$

Cálculo das impedâncias próprias transversais

$$\begin{split} \eta \operatorname{imp} &= 2 \operatorname{Prof}; \\ \operatorname{Nfimp} &= \frac{\sqrt{\eta \operatorname{imp}^2 + \left(\frac{\operatorname{Ls}}{2}\right)^2} + \sqrt{\eta \operatorname{imp}^2 + \left(\frac{\operatorname{Ls}}{2}\right)^2} + \operatorname{Ls}}{\sqrt{\eta \operatorname{imp}^2 + \left(\frac{\operatorname{Ls}}{2}\right)^2} + \sqrt{\eta \operatorname{imp}^2 + \left(\frac{\operatorname{Ls}}{2}\right)^2} - \operatorname{Ls}}; \\ \operatorname{ztp} &= \frac{1}{2 \pi \operatorname{Ls} (\sigma \operatorname{s} + \operatorname{j} \omega \varepsilon)} \left(\operatorname{Log} \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{bs}}{\operatorname{Ls}}\right)^2}}{\frac{\operatorname{bs}}{\operatorname{Ls}}} \right] + \frac{\operatorname{bs}}{\operatorname{Ls}} - \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{bs}}{\operatorname{Ls}}\right)^2} \right] + \frac{1}{4 \pi \operatorname{Ls} \operatorname{Ls} (\sigma \operatorname{s} + \operatorname{j} \omega \varepsilon)} e^{-\gamma \eta \operatorname{imp}} \int_0^{\operatorname{Ls}} \operatorname{Log} [\operatorname{Nfimp}] \operatorname{dl}; \end{split}$$

Cálculo das impedâncias mútuas transversais

$$ztm = ConstantArray \left[0, \frac{Length [Raios]}{2}\right];$$

For $\left[i = 1, i < Length [ztm] + 1, i++, ztm[[i]] = \frac{1}{4 \pi Ls Lr (\sigma s + j \omega \epsilon)} e^{-\gamma \eta [[i]]} \left(\int_{0}^{Lr} Log[Nf[[i]]] dl + \int_{0}^{Lr} Log[Nfimm[[i]]] dl \right) \right];$

Criando as matrizes de impedâncias

Vzlp = ConstantArray[zlp, Length[Eletrodos]];

Mzlp = DiagonalMatrix[Vzlp];

Mzlm = Table[0, {i, Length[Eletrodos]}, {j, Length[Eletrodos]}];

k = 1;

For[i = 1, i < Length[Eletrodos] + 1, i++, For[j = 1 + i, j < Length[Eletrodos] + 1, j++, Mzlm[[i, j]] = Mzlm[[j, i]] = zlm[[k, 1]]; k = k + 1]]

Mzl = Mzlm + Mzlp;

Vztp = ConstantArray[ztp, Length[Eletrodos]];

Mztp = DiagonalMatrix[N[Re[Vztp]]];

3. Montando a Matriz A

Normalizando em relação a Ls

$$CompN = \frac{Comp}{Ls};$$

$$LargN = \frac{Larg}{Ls};$$

$$LsN = \frac{Ls}{Ls};$$

$$\Delta mN = \frac{\Delta m}{Ls};$$

Cálculo do tamanho da matriz "Nósx" e "Nósy".

```
NósxM = NósyM = NósyM = ConstantArray[0, {LargN + 1, CompN + 1}];
```

Criando uma matriz cheia com as posições.

```
k1 = 0; k2 = 0;
For[i = 1, i < LargN + 2, i++, For[j = 1, j < CompN + 2, j++,
NósxN[[i, j]] = k1; NósyN[[i, j]] = k2; k1 = k1 + 1]; k1 = 0; k2 = k2 + 1];
```

Marcando os locais onde não tem nós.

$$\begin{split} & \operatorname{For}\left[k2 = 0, \ k2 < \frac{\operatorname{LargN}}{\operatorname{AmN}}, \ k2 + +, \\ & \operatorname{For}\left[k1 = 0, \ k1 < \frac{\operatorname{CompN}}{\operatorname{AmN}}, \ k1 + +, \ \operatorname{For}\left[i = 0, \ i < (\operatorname{\Delta mN} - \operatorname{LsN}) - 1 + (\operatorname{LsN} - 1) + 1, \\ & i + +, \ \operatorname{For}\left[j = 0, \ j < (\operatorname{\Delta mN} - \operatorname{LsN}) - 1 + (\operatorname{LsN} - 1) + 1, \ j + +, \ \operatorname{NosxN}\left[\left[2 + i + k2 * (\operatorname{\Delta mN} - \operatorname{LsN} + 1 + (\operatorname{LsN} - 1)), 2 + j + k1 * (\operatorname{\Delta mN} - \operatorname{LsN} + 1 + (\operatorname{LsN} - 1))\right]\right] = -1; \\ & \operatorname{NosyN}\left[\left[2 + i + k2 * (\operatorname{\Delta mN} - \operatorname{LsN} + 1 + (\operatorname{LsN} - 1)), 2 + j + k1 * (\operatorname{\Delta mN} - \operatorname{LsN} + 1 + (\operatorname{LsN} - 1))\right]\right] = -1]\right]\right]; \end{split}$$

Voltando às posições reais.

 $N \circ xM = N \circ xN * Ls;$ $N \circ xM = N \circ xN * Ls;$

Montando os vetores com as coordenadas.

Nósx =

Nósy = ConstantArray
$$\left[0, \left\{\left(\frac{\text{Comp}}{\text{Ls}}+1\right)\left(\frac{\text{Larg}}{\Delta m}+1\right)+\left(\frac{\text{Larg}}{\Delta m}\right)\left(\frac{\Delta m}{\text{Ls}}-1\right)\left(\frac{\text{Comp}}{\Delta m}+1\right), 1\right\}\right];$$

(* criando um vetor nulo com comprimento do número de nós *)
Length [Nósx]

```
k = 1;
For[i = 1, i < LargN + 2, i++,
For[j = 1, j < CompN + 2, j++, If[NósxM[[i, j]] > -1, If[NósyM[[i, j]] > -1,
Nósx[[k, 1]] = NósxM[[i, j]]; Nósy[[k, 1]] = NósyM[[i, j]]; k = k + 1]]]];
A = ConstantArray[0, {Length[Eletrodos], Length[Nósx]}];
For [i = 1, i < Length[Eletrodos] + 1, i++, For[j = 1, j < Length[Nósx] + 1,
j++, A[[i, j]] = If[Ex1[[i]] == Nósx[[j]] && Ey1[[i]] == Nósy[[j]],
-1, If[Ex2[[i]] == Nósx[[j]] && Ey2[[i]] == Nósy[[j]], 1, 0]]];
(* A matriz 'A' obedece a lei de formação:
-1 se o nó k for o ponto 1 do eletrodo i,
```

Montando a matriz B

 $B = \frac{-1.0}{2} \operatorname{Abs}[A];$ (* A matriz 'B' obedece a lei de formação: -0, 5 se o nó k for o ponto 1 ou o ponto 2 de i e 0 caso contrário *)

+1 se k for o ponto 2 de i e 0 caso contrário *)

Montando a matriz c

Montando a matriz d

```
d = ConstantArray[0, {Length[Nósx], Length[Eletrodos]}];
For [i = 1, i < Length[Nósx] + 1, i++, For[j = 1, j < Length[Eletrodos] + 1, j++,
    d[[i, j]] = If[Ex2[[j]] == Nósx[[i]] && Ey2[[j]] == Nósy[[i]], -1, 0]]];
(* montando a matriz 'd' que obedece a lei de
  formação: -1 se nó 'i' for o ponto 2 do eletrodo 'j', 0 caso contrário *)
```

Montando o vetor de injeções de correntes externas

(* Número de Nós*) Length[Nósx] 49

```
Ie = ConstantArray[0, Length[Nósx]];
Ie[[5]] = 1.; (* Injeção de corrente de 1 A somente em N5 *)
MatrixForm[Ie]
```

Cálculo do Yeq

$$Yeq = \frac{1.}{2} ((d-c).(Inverse[Mztm].B)) - (d+c).(Inverse[Mzl]).A;$$

Vetor de Potenciais nos nós

Clear $[\psi]$;

 $\psi = Inverse[Yeq].Ie;$

Cálculo das correntes longitudinais e transversais

$$I11 = \left(-Inverse[Mz1] \cdot A - \frac{1}{2} Inverse[Mztm] \cdot B\right) \cdot \psi;$$

$$I12 = \left(Inverse[Mz1] \cdot A - \frac{1}{2} Inverse[Mztp] \cdot B\right) \cdot \psi;$$

$$I1 = \frac{I11 - I12}{2};$$

$$It = I11 + I12;$$

Cálculo dos Potenciais no Solo

```
t = 10; (* análise em 10s *)
Clear[\u03c6];
```



Plot3D[Re[First[\u03c8[x, y, -1]]], {x, 0, Comp}, {y, 0, Larg}]



Export["Vpasso_0m.png", o1];

Referências Bibliográficas

- [1] S. Wolfram, "Launching the Wolfram Open Cloud: Open Access to the Wolfram Language", disponível no portal http://blog.wolfram.com/2016/01/28/launching-the-wolfram-open-cloud-open-access-to-the-wolfram-language/, Jan. 2016.
- [2] IEEE Standards Board 80-2000, *IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding*, IEEE Power Engineering Society.
- [3] F. Cohen, "Notas sobre subestações de energia elétrica," Departamento de Engenharia Elétrica, DEE, POLI/UFRJ, 1988.
- [4] T. F. L. Pinheiro, "Sistemas de aterramento em baixa tensão", Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Elétrica, POLI/UFRJ. Disponível no portal: < <u>http://monografias.poli.ufrj.br/</u>>
- [5] B. M. Assaife, "Aterramento e proteção de sistemas fotovoltaicos," Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Elétrica, POLI/UFRJ. Disponível no portal: < <u>http://monografias.poli.ufrj.br/</u>>
- [6] P. Loques, "Introdução à modelagem de sistemas de aterramento," Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Elétrica, POLI/UFRJ. Disponível no portal: < <u>http://monografias.poli.ufrj.br/></u>
- [7] C. Portela, "Notas de aula da disciplina COE764 Campos e Ondas", COPPE/UFRJ, 1999.
- [8] A. C. S. Lima, "Campos e Ondas em Engenharia Elétrica", COPPE/UFRJ, mar. 2007. Disponível no portal: ">http://www.dee.ufrj.br/~acsl/
- [9] J. C. Salari Filho, "Efeito das descargas atmosféricas no desempenho de linhas de transmissão – modelagens nos domínios do tempo e da frequência", Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Dez. 2006.
- [10] M. A. O. Schroeder, "Modelo eletromagnético para descontaminação das ondas de corrente de descarga – aplicações às medições na estação do Morro do Cachimbo, Tese de D. Sc., Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Mar. 2001.
- [11] R. L. S. Nogueira, "Análise de sistema de aterramento sob solicitações impulsivas: otimização e critérios de segurança em aterramentos de estruturas de linhas de transmissão," Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, 2006
- [12] S. Visacro and A. Soares Jr., "HEM: a model for simulation of lightning-related engineering problems," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 20, no. 2, pp. 1026–1208, Apr. 2005.