



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

SOLUÇÃO COMPUTACIONAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM UMA FORMULAÇÃO PENALIZADA DE ELEMENTOS FINITOS

Liad Paskin

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Naval e Oceânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro Naval e Oceânico.

Orientadores: Prof. Sergio Hamilton Sphaier
Prof. José Luis Drummond Alves

Rio de Janeiro

Agosto de 2016

SOLUÇÃO COMPUTACIONAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM UMA
FORMULAÇÃO PENALIZADA DE ELEMENTOS FINITOS

Liad Paskin

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO
DE ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO
NAVAL E OCEÂNICO.

Examinado por:

Prof. Sergio Hamilton Sphaier, Ph.D.

Prof. José Luis Drummond Alves, Ph.D.

Prof. Paulo de Tarso Themistocles Esperança, Ph.D.

Prof. Carlos Antonio Levi da Conceição, Ph.D.

Dr. Marcelo de Araujo Vitola, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO de 2016

Paskin, Liad

Implementação Computacional Das Equações Incompressíveis De Navier-Stokes Em Uma Formulação Penalizada De Elementos Finitos/ Liad Paskin. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2016.

IX, 51 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Sergio Hamilton Sphaier

José Luis Drummond Alves

Projeto de Graduação – UFRJ/ POLI/ Engenharia Naval e Oceânica, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 50-51.

1. Mecânica dos Fluidos Computacional. 2. Navier-Stokes. 3. Elementos Finitos. 4. Incompressibilidade. 5. Esteira de Von Karman. I. Sphaier, Sergio Hamilton. II. Alves, José Luis Drummond. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, POLI, Engenharia Naval e Oceânica. IV. Implementação Computacional Das Equações Incompressíveis De Navier-Stokes Em Uma Formulação Penalizada De Elementos Finitos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, que me deu o apoio e incentivo necessários para alcançar meus objetivos, que até então culminam neste trabalho. Deles, o incentivo mais esplêndido é o amor incondicional.

Agradeço a Maysa e sua família, que me acompanharam, fortaleceram e incentivaram durante o trajeto mais significativo de minha graduação.

Agradeço a meus amigos, a Rapeize, sem os quais não seria possível almejar o equilíbrio entre as responsabilidades e os gozos da vida.

Agradeço aos mestres que dedicam suas vidas para tornar a universidade pública em um centro de excelência de ensino e pesquisa. Dentre estes, destacam-se meus orientadores que ofereceram particular atenção e carinho a meu desenvolvimento acadêmico.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Naval e Oceânico.

SOLUÇÃO COMPUTACIONAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM UMA FORMULAÇÃO PENALIZADA DE ELEMENTOS FINITOS

Liad Paskin

Agosto/2016

Orientadores: Prof. Sergio Hamilton Sphaier

Prof. José Luis Drummond Alves

Curso: Engenharia Naval e Oceânica

Apresenta-se uma metodologia de modelagem numérica da mecânica dos fluidos pelo método de elementos finitos, capaz de solucionar a dinâmica de escoamentos bidimensionais e incompressíveis de fluidos Newtonianos, descrita pelas equações de Navier Stokes. A metodologia proposta é codificada e avaliada pelo autor.

O modelo numérico apresentado emprega formulação penalizada para tratar as dificuldades matemáticas de divergente nulo que traduz a condição de incompressibilidade. Elementos triangulares e funções quadráticas aproximam a geometria e o espaço de soluções do campo de velocidade respectivamente. Integração reduzida é adotada no termo penalizado, e completa nos demais. O termo convectivo presente na equação de conservação da quantidade de movimento é tratado de forma linearizada pelo algoritmo de Picard. A discretização temporal é avaliada pelo método de diferenças finitas de Crank Nicolson.

Aplica-se o código desenvolvido à modelagem de escoamentos internos e externos com o objetivo de validar e qualificar suas capacidades. Dentre estes, se destaca o caso do cilindro circular imerso em escoamento uniforme, resultando no fenômeno de desprendimento de vórtices conhecido como esteira de von Karman.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

COMPUTATIONAL SOLVING OF NAVIER-STOKES EQUATIONS BY A PENALIZED FINITE ELEMENT'S FORMULATION

Liad Paskin

August/2016

Advisors: Prof. Sergio Hamilton Sphaier

Prof. José Luis Drummond Alves

Course: Naval and Ocean Engineering

A fluid mechanics numerical methodology is presented, which is capable of solving the dynamics of Two-Dimensional incompressible flow of a Newtonian Fluid, described by the Navier-Stokes equations. The proposed methodology has been implemented and validated by the author.

The numerical model applies a penalized formulation in order to address the mathematical difficulties of null divergence that translates the kinematic constraint of incompressibility. Triangular elements and quadratic functions describe the geometry and velocity field respectively. Reduced Integration evaluates the penalized term of the discrete system, while full integration evaluate the others. The convective term of the conservation of momentum equation is linearly treated by the Picard method. Temporal discretization is achieved by a linearly implicit Crank Nicolson scheme.

The developed code is applied for modelling internal and external flows with the main goal of validating and qualifying it's capabilities. Particular attention is paid to the external flow over a circular cylinder that originates the von Karman vortex street phenomena.

Dedicatória

Dedico este trabalho à memória de meu avô paterno, Max Paskin, que formou nossa família e dotou-a dos valores sem os quais, eu nunca seria.

Sumário

1.	Introdução	1
1.1.	Motivação: Mecânica dos fluidos, ciência e engenharia	1
1.2.	Equações de Navier-Stokes.....	1
1.3.	Procedimentos numéricos e mecânica dos fluidos	2
1.4.	Método de elementos finitos e mecânica dos fluidos.....	3
1.5.	Escopo do trabalho	4
2.	Formulação.....	5
2.1.	Equações de governo	6
2.1.1.	Princípio da conservação da quantidade de movimento.....	6
2.1.2.	Princípio da conservação de massa.....	6
2.1.3.	Equação de Navier-Stokes	7
2.1.4.	Formulação penalizada	8
2.1.5.	Adimensionalização	9
2.2.	Formulação variacional	12
2.2.1.	Método dos resíduos ponderados	12
2.2.2.	Incorporando a condição de Neumann.....	12
2.2.3.	Incorporando a equação constitutiva	13
2.3.	Discretização por Elementos Finitos.....	14
2.3.1.	Parametrização geométrica	14
2.3.2.	Funções de forma	15
2.3.3.	Derivadas das funções de forma	15
2.3.4.	Método de Galerkin bidimensional.....	16
2.3.5.	Correspondência entre as formas do P.V.C. formulado	17
3.	Estratégia de solução	18
3.1.	Integração numérica	18
3.2.	Algoritmo de solução transiente	19
3.3.	Esforços no corpo rígido	19
3.4.	Parâmetros numéricos.....	20
3.5.	Algoritmo de solução	22
4.	Estudos de caso	23
4.1.	Escoamento em cavidade retangular	24
4.1.1.	Reynolds 400	24
4.1.2.	Reynolds 1000	25
4.2.	Escoamento em ressalto hidráulico.....	27

4.3.	Impacto sísmico em reservatório	31
4.4.	Cilindro circular imerso em escoamento uniforme	34
4.4.1.	Reynolds 100	36
4.4.2.	Reynolds 1000	39
5.	Conclusão	47
6.	Apêndice.....	48
6.1.	Propriedades tensoriais	48
6.2.	Matrizes da forma semi-discreta	49
7.	Bibliografia	50

1. Introdução

1.1. Motivação: Mecânica dos fluidos, ciência e engenharia.

O estudo da mecânica dos fluidos é atividade de grande relevância no desenvolvimento histórico científico e tecnológico. Preenchendo o meio ambiente em sua totalidade, a mecânica dos fluidos está intrinsicamente relacionada a outras ciências de base, como a mecânica de corpos rígidos, química, biologia, geofísica, etc.

A expansão do conhecimento científico aprofunda o entendimento do comportamento fluido e permite que as aplicações industriais e tecnológicas explorem suas propriedades. No início do século 20, estudos teóricos e empíricos referenciados então à hidrodinâmica e hidráulica respectivamente, finalmente se unem formando uma versátil e poderosa base científica aplicável à engenharia (Eckert, 2007).

Este conhecimento é hoje demandado por diversos setores industriais, e.g., químico, civil, mecânico, automotivo, aeronáutico, naval, oceânico e submarino. Avaliar grandezas físicas características a um escoamento é hoje premissa comum nos cálculos e dimensionamentos das estruturas e equipamentos que compõem esses setores.

1.2. Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes descrevem o escoamento de fluidos Newtonianos, através da formulação matemática do princípio de conservação da quantidade de movimento aplicado a um meio contínuo e em uma descrição Euleriana. Fluidos Newtonianos são amplamente encontrados em problemas de engenharia.

Em conjunto com a equação da continuidade, que traduz o princípio de conservação da massa, a solução das equações de Navier-Stokes permite prever ou recriar os campos de velocidades e pressões característicos a um escoamento. Para tal, formula-se o problema de valor de contorno, onde devem ser conhecidas as características do escoamento nas fronteiras domínio modelado, bem como sua definição em um instante de referência.

O problema de valor de contorno apresentado é utilizado, e.g., para a modelagem de fenômenos atmosféricos e oceânicos, previsão do clima, dispersão de contaminantes, transmissão de calor, esforços em estruturas e equipamentos de diversos setores da engenharia. As equações de Navier-Stokes são apresentadas por todos os livros de mecânica dos fluidos aos quais o autor teve acesso. Dentre eles destaca-se Batchelor (1967).

1.3. Procedimentos numéricos e mecânica dos fluidos

Os procedimentos que embasam o estudo dos fluidos são analíticos, experimentais ou numéricos. Os modelos analíticos capazes de solucionar as equações que descrevem o movimento fluido se baseiam em hipóteses simplificadoras sobre seu comportamento, e.g., escoamentos homogêneos, simétricos, não transientes, puramente viscosos, ou não viscosos. Na maior parte das aplicações de engenharia, o escoamento de interesse possui complexidade tal, que não é contemplado pelas simplificações nas quais se baseiam esses modelos. Evidencia-se assim uma demanda de engenharia por procedimentos experimentais e numéricos.

Uma discussão comparativa quanto ao emprego de procedimentos analíticos, experimentais ou numéricos é apresentada por Griebel, et al. (1998), que explica como procedimentos experimentais são limitados por seu aparelhamento tecnológico, muitas vezes incapaz de fazer medidas que envolvam escalas excessivamente pequenas ou grandes, sejam no espaço ou no tempo. Nesses procedimentos o número de medições é limitado por razões físicas e econômicas. Considerações operacionais relativas à segurança podem tornar determinado experimento inviável. Finalmente, para se tornarem viáveis esses procedimentos frequentemente assumem simplificações que comprometem a precisão e acurácia do resultado obtido em escala de campo.

Procedimentos numéricos são muitas vezes capazes de reproduzir os experimentos em ambiente virtual, e assumem cada vez maior participação em procedimentos de engenharia à medida que os recursos computacionais se tornam mais poderosos. Entretanto, o estado da arte na modelagem computacional de fluidos não dispensa a realização de experimentos. Na verdade, o estudo da mecânica dos fluidos é hoje pautado na interdependência de procedimentos experimentais e numéricos, embasados pela fundamentação teórica de procedimentos analíticos.

Procedimentos numéricos dependem dos experimentos para serem calibrados e validados. Adquiridas suficientes precisão e confiabilidade, pode-se assim tornar dispensável a realização de determinados experimentos, reduzindo custos e disponibilizando os equipamentos para outros ensaios (Hernández, 1999).

Segundo Löhner (2001), a Boeing estima que o número de ensaios em túneis de vento necessários para o desenvolvimento do modelo B-747 (1963) foi reduzido em cerca de 10 vezes para o modelo B-767 (1982) e em 100 vezes para o modelo B-777 (1995), como consequência da crescente capacidade de modelagem numérica de fluidos. Descontando-se o custo de funcionários, um dia de atividades em túnel de vento tem custo da ordem de $\$10^5$, tornando clara a vantagem introduzida pela aplicação da mecânica dos fluidos computacional.

Por procedimentos numéricos em engenharia, entendem-se diferentes métodos capazes de solucionar de forma aproximada as equações que descrevem determinada situação física, sob as condições especificadas. Possibilita-se assim a reconstrução ou previsão de determinado fenômeno em ambiente virtual. Este trabalho limita-se ao escoamento de fluidos newtonianos em regime incompressível, descrito pelas equações de Navier-Stokes.

1.4. Método de elementos finitos e mecânica dos fluidos

Dentre os métodos mais empregados para solucionar numericamente as equações de Navier-Stokes estão os métodos de Diferenças Finitas (MDF), Volumes Finitos (MVF) e Elementos Finitos (MEF). Embora seu emprego na mecânica dos sólidos tenha consagrado o MEF como o método mais adequado para problemas elípticos em domínios de complexidade arbitrária (Gresho & Sani, 1998), historicamente o MEF tem sido menos empregado na simulação de fluidos, quando comparado ao MDF e MVF.

Ainda segundo Gresho & Sani (1998), esse “atraso” vem sendo compensado pelas novas metodologias de elementos finitos, desenvolvidas para lidar com as dificuldades inerentes à simulação de fluidos, até então não encontradas pelos problemas da mecânica dos sólidos aos quais se dedicava a comunidade responsável por construir a forte base teórica que dá origem ao MEF. Dentre os problemas mencionados destacam-se: O operador assimétrico e não linear que representa os termos convectivos; e a condição de incompressibilidade. Hoje, o estado da arte no MEF é capaz de modelar os problemas referenciados com eficiência.

1.5. Escopo do trabalho

O presente artigo apresenta uma metodologia de modelagem numérica das equações de Navier-Stokes pelo método de elementos finitos, aplicada ao escoamento incompressível e bidimensional de um fluido newtoniano. Elementos triangulares quadráticos são empregados com integração reduzida do termo penalizado. O termo convectivo da equação de Navier-Stokes é tratado de forma linear pelo método de Picard (Engelman, et al., 1981). O método de diferenças finitas de Crank Nicolson é responsável pela discretização temporal do modelo (Hughes, et al., 1979).

A metodologia apresentada foi codificada pelo autor em um programa de elementos finitos desenvolvido no laboratório LAMCE/COPPE, estendendo suas capacidades para a simulação de fluidos. Pretende-se evoluir esta metodologia para futuramente representar escoamentos tridimensionais, incluindo modelos de superfície livre, movimento de corpo rígido e turbulência.

Na terceira seção, as equações de governo são apresentadas em suas versões locais, variacionais e semi-discretas, e contextualizadas por suas formulações teóricas e numéricas. A estratégia e os algoritmos adotados pela presente metodologia são descritos na seção três.

Na quarta seção, são exemplificados estudos de caso com fortes efeitos de separação e recirculação, com o objetivo de demonstrar algumas das capacidades da metodologia desenvolvida, bem como validar sua implementação. Particular atenção é dedicada ao caso de interesse da engenharia submarina, onde um cilindro de seção circular está imerso em escoamento uniforme, dando origem ao desprendimento de vórtices que caracteriza a esteira de von Karman com número de Reynolds variando de 100 a 1000.

2. Formulação

Esta seção apresenta a base teórica responsável por formular o problema de valor de contorno (PVC) que permite a solução numérica das variáveis cinemáticas e dinâmicas que caracterizam o escoamento incompressível de fluidos Newtonianos.

Na seção 0 introduzem-se as equações de governo que, em uma descrição Euleriana, traduzem os princípios de conservação da massa e da quantidade de movimento, aplicados a um meio contínuo e em regime incompressível. A estas, aplica-se a equação constitutiva de fluidos Newtonianos e a formulação penalizada da incompressibilidade. Finalmente, a adimensionalização das equações de governo introduz o número de Reynolds, conduzindo à discussão sobre características inerciais e viscosas do escoamento.

O meio contínuo representa uma abstração da matéria, onde se desconsidera sua estrutura molecular, idealizando-a como desprovida de espaços vazios. Qualquer função matemática que se enquadre na hipótese do contínuo deve ser contínua, ou contínua por partes (Malvern, 1969).

Em um modelo contínuo, podem-se definir as variáveis de interesse em relação a pontos do espaço (\mathbf{x}), ou partículas infinitesimais (X). Se as variáveis de interesse são avaliadas em relação à partícula que caracterizam, formula-se o problema em uma descrição Lagrangiana. Quando as variáveis são avaliadas em relação a um ponto no espaço, o problema formulado encontra-se em uma descrição Euleriana.

Tradicionalmente, assim como neste trabalho, problemas envolvendo o escoamento de fluidos são formulados em uma descrição Euleriana, onde as variáveis primárias de interesse da engenharia são os campos de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e pressão $p(\mathbf{x}, t)$ (Batchelor, 1967). Outras abordagens adotam referenciais Lagrangianos, e.g., o método de SPH (Monaghan, 2012) e diferentes variáveis primárias, e.g., função corrente e vorticidade (Yeung, et al., 1993) para formular a descrição do escoamento.

As equações de governo apresentadas na seção 0 conduzem à forma forte do PVC apresentado. Na seção 2.2 a aplicação da formulação variacional conduz o problema à sua forma fraca. Finalmente, a aplicação da metodologia de elementos finitos na seção 2.3 conduz ao problema matricial referido como forma semi-discreta do problema de valor de contorno apresentado.

2.1. Equações de governo

2.1.1. Princípio da conservação da quantidade de movimento

Aplicado a um meio contínuo, e em uma descrição Euleriana, o princípio de conservação da quantidade de movimento é expresso em sua forma diferencial:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad (1)$$

Onde ρ é a massa específica do material modelado, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões de Cauchy e \mathbf{b} o vetor força de corpo (Entre as quais se encontra a força da gravidade). De forma geral, todas as variáveis apresentadas podem variar com o vetor posição \mathbf{x} e o tempo t .

Identificam-se na equação 1, respectivamente, os termos referentes à: aceleração local; aceleração convectiva; forças de superfície; forças de corpo. Se o primeiro termo da equação 1 é nulo, o regime é permanente, se o segundo termo for nulo, a equação resume-se à equação de Stokes, amplamente aplicada a problemas de elasticidade. Juntos os termos de aceleração local e aceleração convectiva formam a derivada material da quantidade de movimento $D(\rho\mathbf{u})/Dt$.

O problema de valor de contorno associado à equação 1 é tipicamente formulado em conjunto com a equação 2 que traduz o princípio de conservação da massa, e com as condições abaixo definidas no domínio Ω e contorno $\Gamma = \Gamma_h + \Gamma_g$.

$$\text{Neumann} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_h$$

$$\text{Dirichlet} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } \Gamma_g \neq \emptyset$$

$$\text{Condição inicial} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{g}_0 \text{ em } \Omega \text{ e tempo } t_0$$

Onde \mathbf{n} é o vetor normal ao contorno Γ_h .

2.1.2. Princípio da conservação de massa

Em sua forma diferencial e descrição Euleriana, o princípio da conservação da massa é expresso pela equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

Para fluidos incompressíveis, a massa específica ρ é constante, e a equação 2 resume-se na equação 3. A restrição física de incompressibilidade traduz-se assim na restrição matemática de divergente nulo do campo de velocidades.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

2.1.3. Equação de Navier-Stokes

As equações 1 e 3 resultam em um sistema de quatro equações e nove incógnitas (O tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico). Para tornar o sistema apresentado definido, aplica-se a equação constitutiva, responsável por relacionar o tensor de tensões com as variáveis cinemáticas (\mathbf{u}) e a pressão (p).

A presente formulação objetiva a descrição de fluidos Newtonianos, onde para determinada viscosidade dinâmica (μ), constante e característica do fluido modelado:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu(\nabla\mathbf{u})^s \quad (4)$$

Sendo \mathbf{I} o tensor identidade e $(\nabla\mathbf{u})^s$ o tensor simétrico do gradiente de deformação, dado por:

$$(\nabla\mathbf{u})^s = \frac{(\nabla\mathbf{u}) + (\nabla\mathbf{u})^T}{2} \quad (5)$$

A equação de Navier-Stokes é obtida ao se inserir a equação constitutiva para fluidos Newtonianos (4) na equação do movimento expressa em sua forma diferencial e em uma descrição Euleriana (1). Resulta assim a expressão vetorial a seguir:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}) = -\nabla p + 2\mu[\nabla \cdot (\nabla\mathbf{u})^s] + \mathbf{b} \quad (6)$$

Observe que no caso particular de fluidos incompressíveis, a equação 3 simplifica o tensor de tensões apresentado, tal que:

$$2\mu[\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^s] \rightarrow \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_3} \end{bmatrix}$$

2.1.4. Formulação penalizada

A restrição cinemática de incompressibilidade (Equação 3) é uma das grandes dificuldades envolvidas na simulação computacional de fluidos, sendo matematicamente expressa pelo divergente nulo do campo de velocidades. Para satisfazer essa restrição, o campo de aproximação da velocidade deve ser construído com divergente nulo a priori, característica essa somente atendida por funções solenoides (Karam, 1989). Formulações baseadas em vorticidade e função corrente, como variáveis principais no lugar de velocidade e pressão, satisfazem essa restrição, mas demonstram-se abordagens limitadas ao espaço bidimensional, que requerem o pós-processamento dos campos de velocidade e pressão a partir de derivadas da solução, comprometendo a precisão do método quando são essas as variáveis de interesse. A técnica de multiplicadores de Lagrange e as formulações penalizadas apresentam-se como alternativas a este problema. A formulação penalizada para solução das equações de Navier-Stokes foi proposta por Hughes, et al. (1979) como “*A mais simples e efetiva implementação da incompressibilidade ao método de elementos finitos*”, sendo a alternativa escolhida por este trabalho para tratar da restrição cinemática de incompressibilidade.

A formulação penalizada é obtida impondo uma relação entre a pressão e o campo de velocidades, tal que:

$$p = -\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (7)$$

onde λ é o parâmetro de penalização. A convergência da formulação penalizada para as equações incompressíveis de Navier-Stokes foi comprovada por Temam (1977 *apud*. Hughes, et al., 1979). Percebe-se na equação 7, que o divergente do campo de velocidades deve anular-se para que se mantenha uma pressão finita à medida que λ tende a infinito. O parâmetro λ deve ser suficientemente grande para que a compressibilidade introduzida seja mínima, mas não grande demais para que cause complicações numéricas.

Segundo Hughes, et al. (1979), o parâmetro λ pode ser expresso como:

$$\lambda = c \mu \quad (8)$$

onde c é uma constante dependente do tamanho de palavra do computador utilizado. Hughes, et al. (1979), ainda sugerem que para um tamanho de palavra de ponto flutuante entre 60 e 64 bits, uma escolha apropriada para c é de 10^7 . Este valor foi adotado nos casos aqui apresentados. Análises de sensibilidade da solução em relação a variações do parâmetro c , indicam que nos modelos estudados, o resultado não é sensível a variações da ordem de 10^2 a 10^3 , dependendo do problema modelado, de acordo com o previsto pela referência citada.

Finalmente, inserindo-se a equação 7 na equação 6, obtêm-se a forma forte das equações incompressíveis de Navier-Stokes em sua formulação penalizada:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \nabla [\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})] + 2\mu [\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^s] + \mathbf{b} \quad (9)$$

Observa-se que a equação 9 forma um sistema de três equações e três incógnitas (Vetor campo de velocidades \mathbf{u}). O campo de pressões pode ser obtido a partir do campo de velocidades, avaliando-se a equação 7.

2.1.5. Adimensionalização

Observa-se na equação 6 que o problema formulado envolve dimensões de massa $[M]$, comprimento $[L]$ e tempo $[T]$. Em determinado escoamento com massa específica ρ e viscosidade μ , constantes e homogêneas, ao qual se aplica esta formulação, deve-se identificar as grandezas características L_0 e U_0 , que se referem respectivamente ao comprimento e velocidade característicos. Pode-se então reformular o problema considerando as variáveis adimensionais do escoamento, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}/U_0 & t^* &= t \cdot U_0/L_0 & \nabla^* &= \nabla L_0 \\ p^* &= p/(\rho U_0^2) & \mathbf{b}^* &= \mathbf{b} \cdot L_0/(\rho U_0^2) \end{aligned}$$

Ao substituir as relações acima na equação 6, e multiplicar o resultado por $\rho U_0^2/L_0$, obtêm-se a versão adimensional da equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^*) = -\nabla^* p^* + 2 \left[\frac{1}{Re} \right] [\nabla^* \cdot (\nabla^* \mathbf{u}^*)^S] + \mathbf{b}^* \quad (10)$$

onde se revela o número de Reynolds dado por:

$$Re = \rho U_0 L_0 / \mu \quad (11)$$

O adimensional Re introduzido é um parâmetro de grande relevância na caracterização do escoamento modelado. Ponderando as características inerciais ($\rho U_0 L_0$) e viscosas (μ) do escoamento, o número de Reynolds relaciona-se com o regime deste escoamento, que pode ser classificado entre laminar, turbulento, ou transitório.

No regime laminar, as forças viscosas predominam sobre as forças inerciais, e o escoamento é caracterizado por linhas de correntes bem definidas, agrupadas em camadas laminares entre as quais não se observa fluxo de massa.

No regime turbulento, as forças inerciais se tornam predominantes, observa-se então flutuações aparentemente aleatórias nas variáveis do escoamento e nas linhas de corrente resultantes. O regime transitório caracteriza a transição entre os regimes laminar e turbulento.

Aumentando-se o número de Re , a contribuição do termo convectivo $\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ na solução do escoamento se torna mais relevante. Este termo é responsável pela não linearidade das equações de Navier-Stokes, de forma que o aumento do número de Reynolds distancia o escoamento de sua aproximação linear. Na prática, mais iterações são necessárias para que se observe a convergência da solução em uma estratégia iterativa de linearização das equações de Navier-Stokes, como a que é aqui empregada.

Ainda, a discretização do termo convectivo $\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ pode introduzir efeito desestabilizador no sistema matricial resultante. Este efeito pode ser observado pela oscilação espúria do campo de velocidades, ou inclusive levar à inconsistência matemática do sistema matricial. A forma natural de estabilização do sistema envolve o refinamento do domínio computacional, mas o refinamento global necessário para que se estabilize o termo convectivo em maiores números de Reynolds pode aumentar a demanda de memória e processamento, tornando a simulação proibitiva ou inibindo o refinamento local em regiões de interesse. Diferentes estratégias são propostas para aumentar a estabilidade do sistema matricial resultante, dentre as quais se destaca na

comunidade de elementos finitos a técnica de SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) ricamente apresentada por Brooks & Hughes (1982), e equivalente ao esquema Upwind empregado em métodos de volumes finitos.

Conforme exposto, o regime turbulento é caracterizado pela intensa flutuação das características do escoamento. Para que a presente formulação seja capaz de capturar este fenômeno, deve-se refinar a discretização do domínio computacional nas dimensões de espaço e tempo. Novamente, esta estratégia, referida como DNS (Direct Numerical Simulation), tende a tornar o modelo proibitivo graças ao excessivo desempenho computacional demandado. A formulação RANS (Reynolds Average Navier-Stokes) apresenta-se como alternativa a este problema, reformulando as equações de Navier-Stokes ao decompor suas variáveis em componentes médias e flutuantes (Wilcox, 1998). Como a maior parte dos escoamentos cuja modelagem computacional é de interesse da engenharia encontra-se em regime turbulento, esta técnica é muito empregada na simulação de fluidos. A formulação RANS introduz o problema de fechamento às equações de Navier-Stokes, devendo contar com um modelo de turbulência calibrado experimentalmente para contemplar características específicas a diferentes escoamentos.

2.2. Formulação variacional

Emprega-se aqui o método dos resíduos ponderados, equivalente à formulação variacional do PVC estabelecido na seção 0, resultando assim na chamada “forma fraca” do problema, em cuja equação estão incorporadas as condições de contorno correspondentes. Possibilita-se assim a minimização do erro introduzido ao se solucionar o problema formulado de forma aproximada pelo método de elementos finitos.

A forma fraca do problema de valor de contorno exposto na seção anterior, e definido no domínio Ω e contorno $\Gamma = \Gamma_h + \Gamma_g$, é dada por:

$$\int \mathbf{w} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + \int \mathbf{w} \cdot \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\Omega + \int 2\mu [(\nabla \mathbf{w})^s : (\nabla \mathbf{u})^s] d\Omega + \int \lambda [(\nabla \mathbf{w}) : (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] d\Omega = \int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}) d\Gamma_h + \int \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (12)$$

Tal que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_h \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \text{ em } \Gamma_g \neq \emptyset \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}_0 \text{ em } \Omega \text{ e tempo } t_0 \end{aligned}$$

Os seguintes passos conduzem à dedução da equação 12 a partir da equação 1.

2.2.1. Método dos resíduos ponderados

Multiplica-se a equação 1 pela função vetorial \mathbf{w} , chamada de função peso. Desde que contínua por partes, \mathbf{w} deve ser arbitrária. Integrando-se a equação resultante no domínio Ω obtemos:

$$\int \mathbf{w} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) d\Omega + \int \mathbf{w} \cdot [\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})] d\Omega = \int \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (13)$$

2.2.2. Incorporando a condição de Neumann

O primeiro termo exposto no lado direito da equação 13 é integrado por partes de forma que:

$$\int \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}) d\Omega - \int \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (14)$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss:

$$\int \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}) d\Omega = \int (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (15)$$

Graças à propriedade de simetria do tensor $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\int (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma \quad (16)$$

Sendo a função peso arbitrária, ela é definida de modo que:

$$\mathbf{w} = 0 \text{ no contorno } \Gamma_g$$

Insere-se então a condição de Neumann descrita na seção 2.1.1, em conjunto com as equações 14, 15 e 16 na equação 13, resultando em:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{w} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) d\Omega + \int \mathbf{w} \cdot [\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})] d\Omega \\ = \int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}) d\Gamma_h - \int \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

2.2.3. Incorporando a equação constitutiva

Aplicando-se a propriedade matricial exposta no apêndice 6.1 observa-se que:

$$\nabla \mathbf{w} : (\nabla \mathbf{u})^s = (\nabla \mathbf{w})^s : (\nabla \mathbf{u})^s \quad (18)$$

A equação constitutiva 4 aplicada ao segundo termo da equação 17, conduz à:

$$\int \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int (\nabla \mathbf{w}) : (-p\mathbf{I}) d\Omega + \int 2\mu [(\nabla \mathbf{w})^s : (\nabla \mathbf{u})^s] d\Omega \quad (19)$$

Adotando a penalização descrita na equação 7:

$$\int \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int \lambda [(\nabla \mathbf{w}) : (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}] d\Omega + \int 2\mu [(\nabla \mathbf{w})^s : (\nabla \mathbf{u})^s] d\Omega \quad (20)$$

Finalmente, a inserção da equação 20 na equação 17 resulta na equação 12.

2.3. Discretização por Elementos Finitos

O presente método discretiza o domínio em elementos triangulares. A geometria do elemento é linearmente parametrizada em função de suas coordenadas naturais, enquanto o espaço de soluções é parametrizado por funções de forma quadráticas. Dessa forma, portanto, cada elemento possui seis nós. Sendo o domínio bidimensional, 12 graus de liberdade estão associados a cada elemento.

2.3.1. Parametrização geométrica

Cada elemento é parametrizado em função de suas coordenadas naturais r, s , e $t(r, s)$. Introduzem-se também as coordenadas nodais de valor inteiro I, J , e K . As coordenadas r, s , e t assumem valor unitários quando suas respectivas coordenadas nodais I, J , e K assumem valores máximos e valor nulo quando as coordenadas nodais assumem valor unitário. A seguinte relação é válida:

$$t(r, s) = 1 - r - s$$

A Figura 1 ilustra o elemento de referência no qual se mapeia todos os elementos do domínio computacional. Os nós deste elemento são indexados por um número inteiro (i_{noel}), assim como por suas coordenadas nodais (I, J, K). Curvas de valores constantes das coordenadas naturais (r, s, t) são também indicadas.

O vetor posição x relaciona-se com coordenadas naturais do elemento em que se encontra tal que, dadas as coordenadas x_1, x_2 e x_3 dos vértices deste elemento:

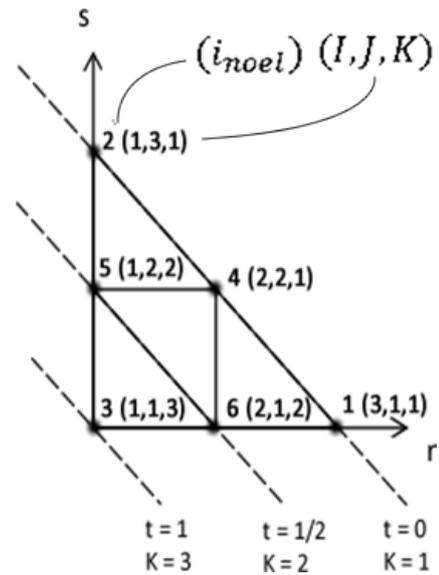


Figura 1 – Elemento de referência

$$x = x_1 r + x_2 s + x_3 t \tag{21}$$

2.3.2. Funções de forma

As funções de forma são construídas para possuir valor unitário no nó à que se referem, e nulo nos demais (Figura 2). Em qualquer ponto do elemento, o somatório das funções de forma é unitário. Ainda, as funções de forma só são definidas no elemento à que se referem, sendo nulas nos demais.

Dessa forma, sendo as funções de forma indicadas pelo nó à que se referem (i_{noel}):

$$N_1 = r(2r - 1)$$

$$N_2 = s(2s - 1)$$

$$N_3 = t(2t - 1)$$

$$N_4 = 4rs$$

$$N_5 = 4st$$

$$N_6 = 4tr$$

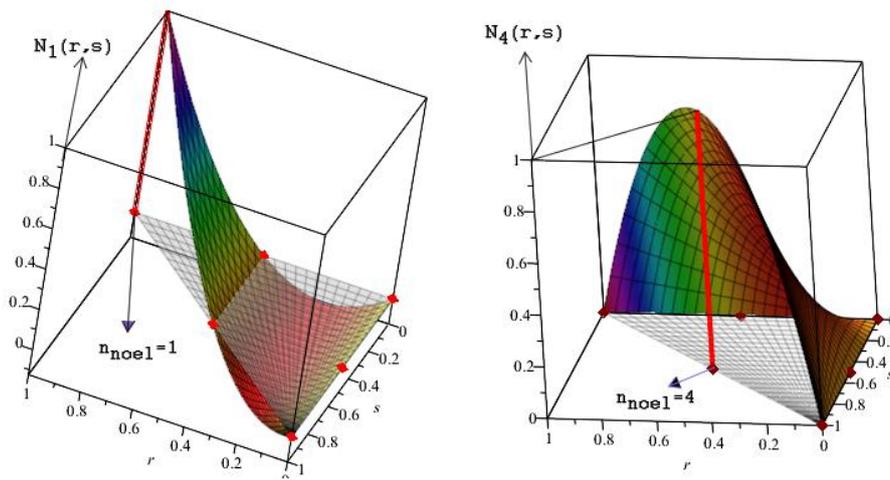


Figura 2 - Funções de forma quadráticas $N_1(r, s)$ e $N_4(r, s)$

2.3.3. Derivadas das funções de forma

A presente formulação exige que as derivadas das funções de forma em relação ao vetor $x = x\hat{i} + y\hat{j}$ sejam avaliadas. A função de forma N_i é definida na seção 2.3.2 em termos de suas coordenadas naturais r, s e $t(r, s)$, de modo que a regra da cadeia é aplicada para possibilitar a avaliação:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}$$

Observa-se que, de acordo com a equação 21:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = x_2 - x_3$$

Define-se o jacobiano do mapeamento J , tal que:

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial r \\ \partial N_i / \partial s \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix}$$

O determinante de J coincide com o dobro da área do elemento (2Δ), tal que o inverso do jacobiano deste mapeamento é:

$$J^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial r \\ \partial N_i / \partial s \end{bmatrix}$$

2.3.4. Método de Galerkin bidimensional

O método de Galerkin é definido utilizando-se funções de forma idênticas para aproximar o espaço de solução (\mathbf{u}) e a função peso (\mathbf{w}). O campo de velocidades é obtido pela soma das soluções em todos os nós do domínio, ponderadas pela função de forma associada ao nó correspondente.

O número de equações n_{eq} é dado pelo número de nós do domínio n_{np} , multiplicado pelo número de graus de liberdade por nó $n_{gl} = 2$, em um espaço bidimensional. A condição de Dirichlet deve ser imposta em parte do contorno (Γ_g) de forma que o número de equações prescritas n_{eqp} é maior do que zero.

Seja d_j a velocidade obtida no grau de liberdade j , g_k a velocidade prescrita no grau de liberdade $k \subseteq \Gamma_g$, e c_i o valor da função peso no grau de liberdade i , então o método de Galerkin é aplicado de forma que \mathbf{u} e \mathbf{w} sejam aproximados por $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$, definidos a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \sum_{j=1}^{n_{eq}} \{N_j d_j\} + \sum_{n_{eq}+1}^{n_{eqp}} \{N_k g_k\} \\ \hat{\mathbf{w}} &= \sum_{i=1}^{n_{eq}} \{N_i c_i\} \\ \hat{\mathbf{w}} &= 0 \text{ no contorno } \Gamma_g \end{aligned}$$

Ao substituir $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{w}}$ no lugar de \mathbf{u} e \mathbf{w} na equação 12, obtêm-se um sistema matricial, na forma da equação 22. Observe que a partir de agora, \mathbf{u} passa a denotar o vetor solução, formado por $d_{j=1..n_{eq}}$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C} + \mathbf{K}(\mathbf{u})]\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (22)$$

Onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} a matriz de difusão, $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ a matriz de convecção assimétrica e não linear, \mathbf{F} o vetor forçante e $\dot{\mathbf{u}}$ o campo de aceleração local. A matriz de difusão é composta pelos termos viscoso \mathbf{C}_μ e penalizado \mathbf{C}_λ , tal que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_\mu + \mathbf{C}_\lambda \quad (23)$$

O desenvolvimento desta formulação pode ser acompanhado pela metodologia de elementos finitos, profundamente apresentada por Hughes (1987), e resulta na independência entre c_i e o espaço de solução d_j , devido à arbitrariedade de \mathbf{w} . As matrizes apresentadas nas equações 22 e 23 têm sua forma detalhada no apêndice 6.2.

2.3.5. Correspondência entre as formas do P.V.C. formulado

A Tabela 1 ilustra à que termos das equações 1 (Forma forte) e 12 (Forma fraca) se referem os termos da equação 22 (Forma semi-discreta).

Tabela 1 - Correspondência entre termos das formas forte, fraca e semi-discreta

Forte	Fraca	Semi-Discreta
$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$	$\int \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega$	$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}$
$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$	$\int 2\mu [(\nabla \mathbf{w})^s : (\nabla \mathbf{u})^s] d\Omega$ $+ \int \lambda [(\nabla \mathbf{w}) : (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}] d\Omega$	$\mathbf{C} \mathbf{u}$
$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$	$\int \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\Omega$	$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \mathbf{u}$
\mathbf{b} $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h}$ em Γ_h	$\int (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}) d\Gamma_h + \int \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega$	\mathbf{F}

3. Estratégia de solução

Apresentam-se nesta seção os métodos que permitem a resolução e avaliação do sistema matricial da equação 22.

3.1. Integração numérica

Em modelos matemáticos com restrições internas, como no caso da incompressibilidade, as propriedades do modelo contínuo não são automaticamente transferidas para o modelo discreto (Karam, 1989). As condições de existência e unicidade para o modelo discreto, expressas pelo teorema de Brezzi (Brezzi, 1974 *apud*. Karam, 1989), devem então ser avaliadas para cada espaço de aproximação escolhido. Neste trabalho optou-se em discretizar o domínio em elementos triangulares quadráticos, se fazendo necessário o emprego de integração reduzida nos termos penalizados (Hughes, et al., 1979). A integração reduzida dos termos penalizados torna o modelo obtido matematicamente similar àquele obtido pelos métodos mistos (Malkus & Hughes, 1978).

Aplica-se então a integração de Gauss, avaliando a matriz penalizada C_λ em um ponto, posicionado no centroide do elemento. Os demais termos das equações 22 e 23 são integrados por três pontos. Os pontos onde se avaliam as propriedades integradas se posicionam no elemento de referência, no qual todos os elementos são mapeados, de acordo com a Figura 3.

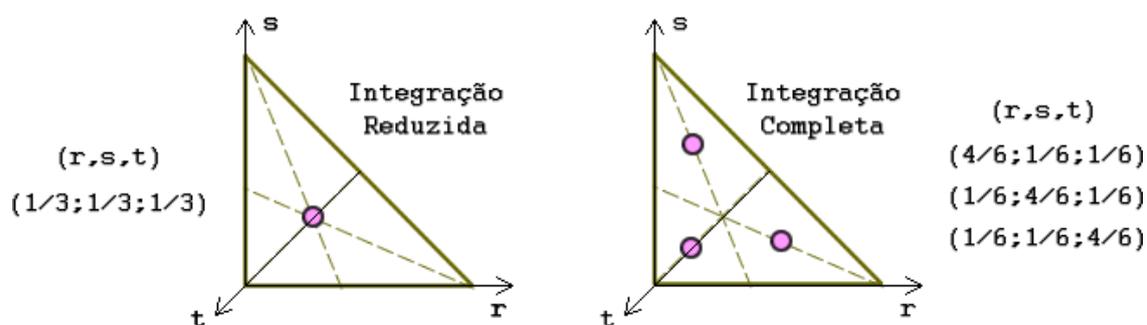


Figura 3 - Integração de Gauss no triângulo de referência

3.2. Algoritmo de solução transiente

Implementou-se o algoritmo preditor corretor, linear implícito e de passo único, apresentado por Hughes, et al. (1979). Considerando-se determinado instante de tempo $t_n = n\Delta t$ e iteração i , indicados pelos subscritos e sobrescritos abaixo se apresenta as equações 24, 25, 26 e 27 que descrevem o método adotado.

$$(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} + \gamma\Delta t [\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{K}(u_{n+1}^{(i)})u_{n+1}^{(i)}] \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + (1 - \gamma)\Delta t \dot{\mathbf{u}}_n \quad (25)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = (\mathbf{u}_{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) / (\gamma\Delta t) \quad (27)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}$ é o preditor do campo de velocidades, Δt o passo de tempo, e γ uma constante que determina a estabilidade e convergência do método. Nas aplicações seguintes $\gamma = 0.5$.

A Equação 24 é resolvida a cada iteração. A matriz não linear $\mathbf{K}(u_{n+1}^{(i)})u_{n+1}^{(i)}$ é avaliada de forma explícita enquanto a matriz simétrica linear $(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})$ é avaliada de forma implícita. A matriz a ser invertida é linear e a inversão pode ser efetuada somente uma vez para um passo de tempo fixo. A matriz não linear é tratada de forma linearizada conforme o método de Picard (Engelman, et al., 1981).

A inversão da matriz $(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})$ é efetuada de forma direta pelo algoritmo de fatoração de Crout (Hughes, 1987). O algoritmo de reordenamento de malha de Cuthill & McKee (1969) foi implementado para aperfeiçoar o desempenho da inversão.

3.3. Esforços no corpo rígido

As forças nodais equivalentes à distribuição de esforços na estrutura rígida são avaliadas conforme apresentado por Silva, et al. (2009). Considera-se então a força interna atuante em cada elemento acoplado ao corpo rígido e indicado pelo domínio Ω_e :

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e \quad (28)$$

Seja n_{en} o número de nós pertencentes ao elemento e N_I a função de forma associada ao nó I , a matriz \mathbf{B} é o operador diferencial discreto:

$$\mathbf{B} = B_{jI} = \frac{\partial N_I}{\partial x_j}, \quad I = 1, \dots, n_{en} \quad (29)$$

A força nodal equivalente em determinado nó é obtida pelo somatório da contribuição de força nodal interna do nó para com cada elemento adjacente a este nó. A força total no corpo é finalmente avaliada somando-se as reações às forças nodais equivalentes dos nós adjacentes à estrutura.

3.4. Parâmetros numéricos

As qualidades de convergência e estabilidade do modelo numérico empregado relacionam-se com parâmetros adimensionais apresentados nesta seção.

O número de Peclet (Pe_e) é definido pelo número de Reynolds (Equação 11) avaliado com variáveis características do elemento computacional a que se refere (subscrito e). Seja U_e a velocidade característica do escoamento no elemento e L_e o comprimento característico deste elemento:

$$Pe_e = \rho U_e L_e / \mu \quad (30)$$

Analogamente ao número de Reynolds, o Peclet compara a intensidade de forças inerciais e viscosas do escoamento. Entretanto no número de Peclet as forças inerciais tem sua intensidade avaliada a nível do elemento computacional, relacionando-a ao comprimento do elemento L_e . De forma geral o aumento do número de Peclet indica a preponderância de forças inerciais, incentivando os efeitos adversos de estabilidade e convergência advindos do termo convectivo e discutidos em 2.1.5. Sendo ρ , U_e e μ propriedades do escoamento, L_e deve ser reduzido para que o número de Peclet seja suficientemente pequeno indicando a adequação do domínio computacional ao tratamento do termo convectivo.

Na equação unidimensional de convecção-difusão, e.g., prova-se que a formulação discreta é estável para $Pe < 1$ (Brooks & Hughes, 1982). Para problemas não lineares e multidimensionais, entretanto, não é possível estabelecer um limite preciso para o Peclet, devendo este ser avaliado de forma específica para cada escoamento e discretização modelados.

Neste trabalho, L_e é considerado como a média das arestas do elemento triangular, enquanto U_e é a média dos módulos da velocidade obtida nos vértices do elemento.

O número de Courant-Friedrichs–Lewy (CFL) relaciona as discretizações espacial e temporal com a velocidade característica U_e . Seja Δt o passo de tempo empregado, o CFL é definido para determinado elemento:

$$CFL_e = U_e \Delta t / L_e \quad (31)$$

O CFL pondera a taxa com que uma “Partícula característica” atravessa um elemento (U_e/L_e), com o intervalo de tempo em que se avaliam as propriedades do escoamento (Δt). Se $CFL > 1$, esta partícula atravessa o elemento em um intervalo de tempo menor do que Δt , sugerindo que informação pode estar sendo perdida entre os passos de tempo considerados. Assim como para o Peclet, em problemas complexos o limite de CFL que garante a estabilidade e do modelo não é precisamente definido, devendo ser avaliado de forma específica para cada problema e podendo inclusive ser maior do que a unidade. O intervalo de tempo deve ser estipulado de forma a garantir que o CFL seja inferior ao limite identificado.

Conforme discutido em 2.1.5, o termo convectivo é responsável por introduzir efeitos adversos de estabilidade e convergência ao modelo numérico. É de grande interesse então avaliar a intensidade do termo convectivo em determinado escoamento, reconhecendo suas peculiaridades. Com este objetivo compara-se a norma entre os termos convectivos (Proporcionais à matriz de convecção) e difusivos (Proporcionais a matriz de difusão) da equação 22, através da razão:

$$\frac{|K(u) u|}{|C u|}$$

A convergência do algoritmo de solução iterativo é atestada pela discrepância dos termos convectivos em dois passos sucessivos, dada por:

$$\frac{|K(u_{n+1}^{(i)}) u_{n+1}^{(i)}| - |K(u_{n+1}^{(i-1)}) u_{n+1}^{(i-1)}|}{|K(u_{n+1}^{(i)}) u_{n+1}^{(i)}|}$$

3.5. Algoritmo de solução

O sequenciamento da estratégia de solução apresentada é ilustrado a seguir.

$$\overbrace{(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})}^{\mathbf{A}} \overbrace{\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}}^{\mathbf{x}_{n+1}^{i+1}} = \overbrace{\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} + \gamma\Delta t [\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{K}(u_{n+1}^{(i)})u_{n+1}^{(i)}]}^{\mathbf{B}_{n+1}^{(i)}}$$

- Avalia matrizes de massa e difusão \mathbf{M} , \mathbf{C} .
- Fatora a matriz $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C}$.
- Loop no tempo $n = (0..N)$, $t = (0..N \cdot \Delta t)$:
 - Calcula preditor $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + (1 - \gamma)\Delta t \dot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{u}_{n+1}^{(0)}$.
 - Loop iterativo ($i = 0..$ convergência):
 - Avalia a matriz de convecção $\mathbf{K}(u_{n+1}^{(i)})$.
 - Avalia o vetor forçante $\mathbf{B}_{n+1}^{(i)}$.
 - Avalia campo de velocidades $\mathbf{x}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{n+1}^{(i)}$.
 - Confere a convergência entre $\mathbf{K}(u_{n+1}^{(i-1)})$ e $\mathbf{K}(u_{n+1}^{(i)})$.
 - Atualiza campo de acelerações $\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = (\mathbf{u}_{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) / (\gamma\Delta t)$.
 - Atualiza campo de pressões $p = -\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})$.
 - Avalia esforços no corpo rígido.
 - Avalia parâmetros numéricos relevantes.
 - Escreve arquivos de saída.

4. Estudos de caso

Nesta seção apresentam-se aplicações com o objetivo de avaliar algumas das capacidades da metodologia proposta e validar sua implementação. Os casos foram selecionados estrategicamente para avaliar diferentes efeitos hidrodinâmicos como recirculação, separação da camada limite, ondas de choque e desprendimento de vórtices. Os resultados obtidos são confrontados com resultados experimentais e numéricos, presentes na literatura ou obtidos com o uso de consagrados software comerciais. Nesta seção, todas as medidas e grandezas apresentadas são adimensionais, podendo representar qualquer sistema de unidade consistente.

Inicialmente é apresentado um problema do escoamento interno induzido em uma cavidade pelo movimento de seu bordo superior com $Re = 400$ e $Re = 1000$. Este escoamento dá origem a diversos focos de recirculação no interior da cavidade. Compara-se o campo de velocidade em regime permanente com aqueles disponíveis na literatura.

A seguir avalia-se o caso do escoamento interno a um duto, que ao encontrar um obstáculo com cantos vivos, da origem a fortes efeitos de separação e recirculação à jusante do obstáculo. Os resultados para o campo de velocidade são comparados em regime transiente com aqueles gerados na ferramenta comercial de volumes finitos, Fluent.

O terceiro caso é de interesse da engenharia sísmica, e modela um reservatório, cuja barragem é subitamente acelerada de encontro ao fluido. O termo convectivo é nulo, sendo o problema formulado reduzido à equação de Stokes apresentada na seção 2.1.1. O campo de pressões gerado ao longo da barragem é comparado com aquele previsto na literatura.

Finalmente, modela-se o caso de interesse da indústria submarina, onde o escoamento externo uniforme encontra um corpo cilíndrico de seção circular, induzindo o desprendimento dos vórtices que formam a esteira de von Karman. Comparam-se os resultados do campo de velocidades e as forças induzidas no cilindro com aqueles previstos em modelos experimentais e numéricos. Explora-se o limite que a formulação empregada encontra ao modelar escoamentos em maiores números de Reynolds e com forte caráter convectivo.

4.1. Escoamento em cavidade retangular

Neste caso, o escoamento interno desenvolve-se no interior da cavidade apresentada na Figura 4, induzido pela velocidade horizontal unitária de seu bordo superior. Os demais bordos da cavidade mantêm velocidade nula, e todos possuem dimensões unitárias. O número de Reynolds é avaliado para este problema considerando comprimento e velocidade característicos unitários. O escoamento converge em um regime estacionário.

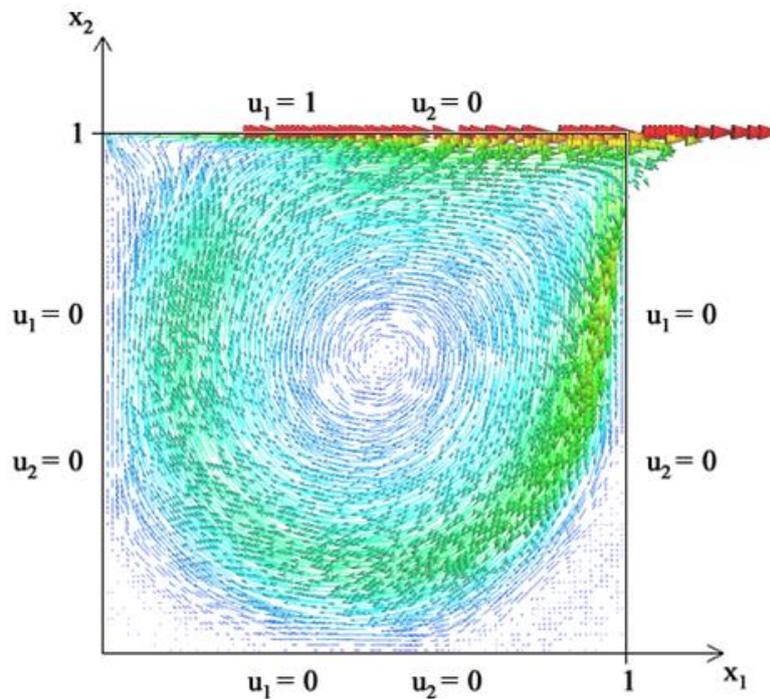


Figura 4. Geometria e condições de contorno; Campo de velocidades ($Re = 1000$).

O problema apresentado foi modelado para $Re \leq 1000$. Aqui são apresentados os resultados em regime permanente obtidos para $Re = 400$ e $Re = 1000$. Conforme exposto a seguir, os resultados obtidos apresentam forte concordância com aqueles de referência expostos na literatura.

4.1.1. Reynolds 400

A malha uniforme modelada é formada pela subdivisão de cada bordo em 80 segmentos igualmente espaçados, formando 80×80 quadrados que por sua vez originaram o dobro de elementos triangulares quadráticos. Formam-se dessa forma 25.921 nós e 12.800 elementos.

O resultado obtido em regime permanente com número de Reynolds 400 é comparado com o resultado publicado por Reddy (1982) na Figura 5. Nesta figura superpõem-se as componentes horizontais e verticais do perfil de velocidade observado ao longo das linhas de centro vertical e horizontal respectivamente. A comparação realizada indica boa concordância entre os resultados.

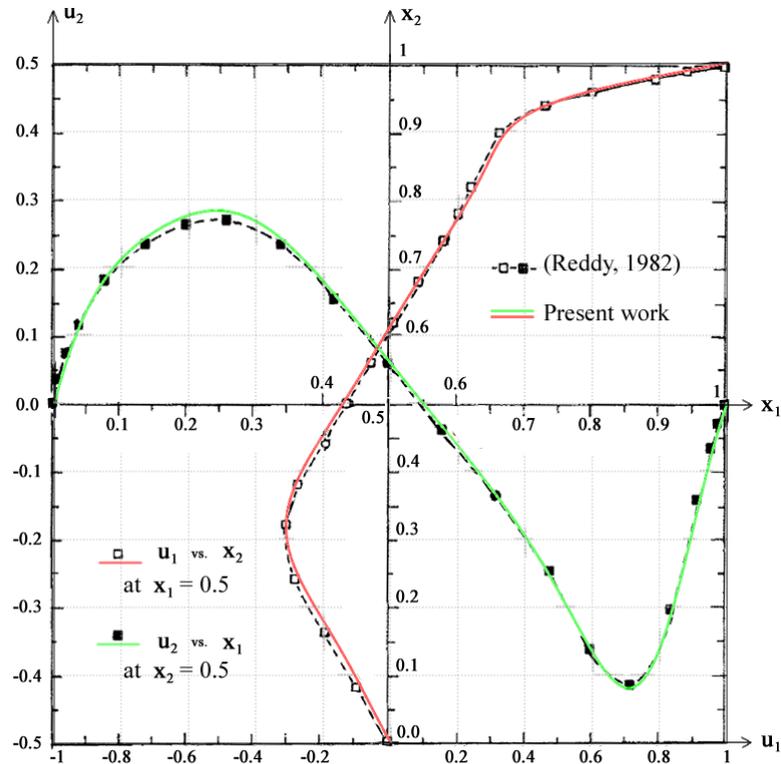


Figura 5. Perfil de velocidade perpendicular ao longo das linhas de centro com $Re = 400$. Adaptado de Reddy (1982).

4.1.2. Reynolds 1000

A malha uniforme modelada é formada pela subdivisão de cada bordo em 100 segmentos igualmente espaçados, formando 100×100 quadrados que por sua vez originaram o dobro de elementos triangulares quadráticos. Formam-se dessa forma 40.401 nós e 20.000 elementos.

Em estado permanente, o perfil de velocidade perpendicular ao longo das linhas de centro horizontal e vertical para o problema da cavidade em $Re = 1000$ é confrontado com os resultados apresentados por Ghia, et al. (1982), na Figura 6. A comparação indica boa concordância entre os modelos.

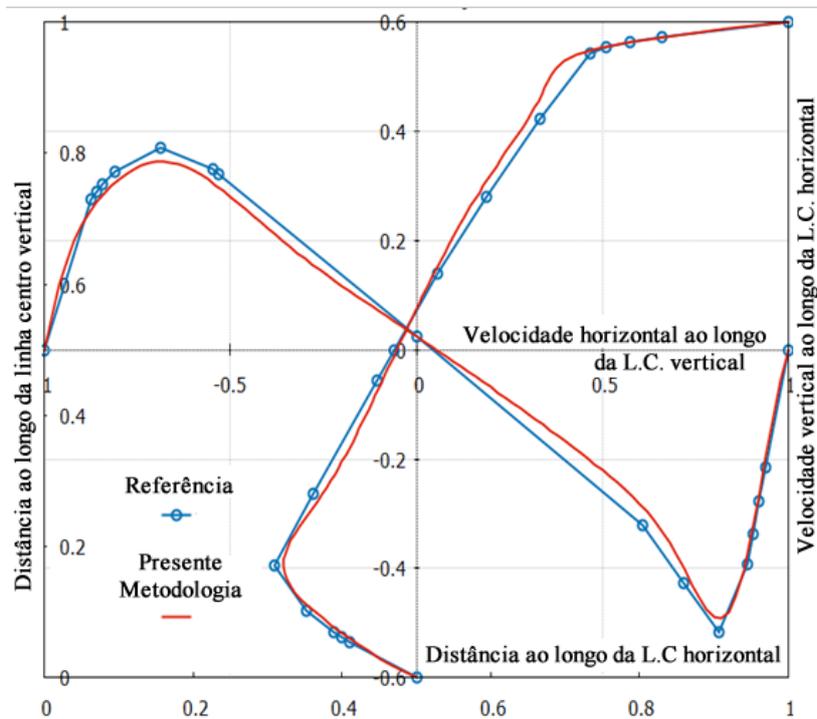


Figura 6. Perfil de velocidade perpendicular ao longo das linhas de centro (L.C.) com $Re = 1000$. Confrontado com Ghia, et al. (1982).

Ainda em estado permanente, as linhas de corrente obtidas por esta metodologia são comparadas com aquelas obtidas por Ghia, et al. (1982), na Figura 7.

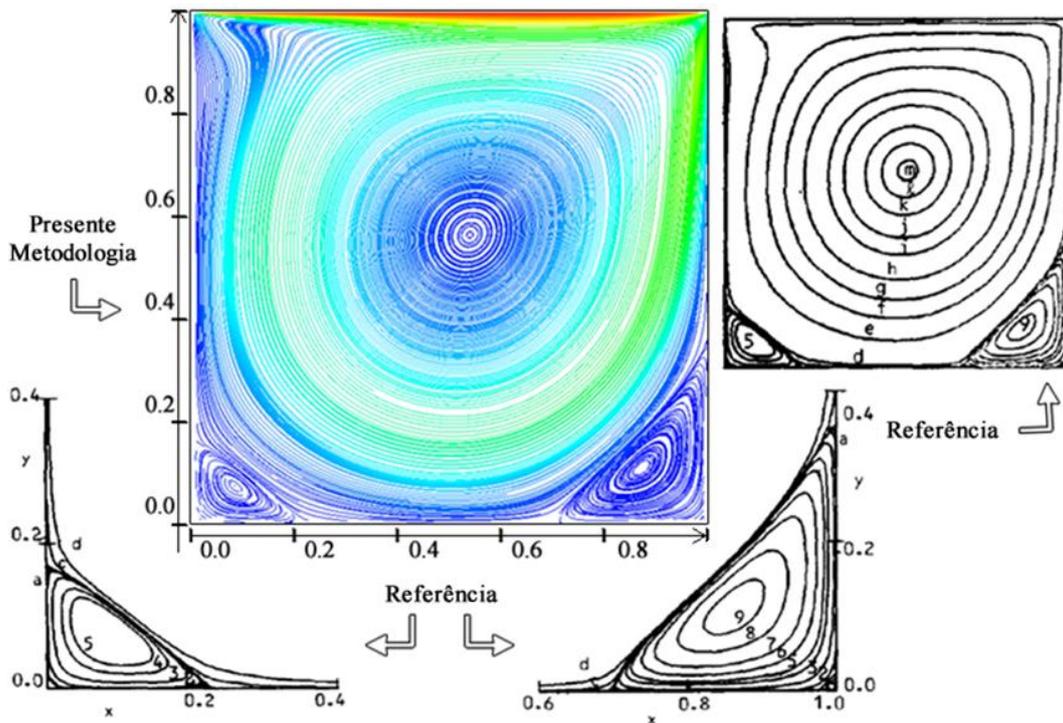


Figura 7. Linhas de corrente obtidas com $Re = 1000$. Confrontado com Ghia, et al. (1982).

4.2. Escoamento em ressalto hidráulico

Modela-se nesta seção o escoamento através de um duto obstruído por um obstáculo de formato quadrático. A geometria do domínio é ilustrada na Figura 8, em conjunto com as condições de contorno e o campo de velocidades obtido na unidade de tempo 2,1. O fluido modelado possui massa específica $\rho = 200$ e viscosidade dinâmica $\mu = 1$. Este modelo converge para um resultado estacionário, mas a solução transiente é investigada.

A fronteira esquerda do domínio representado tem velocidade prescrita unitária, e direção perpendicular à geometria do contorno. A fronteira direita do domínio representa a saída, com fluxo livre induzido pela condição de Neumann nula. As demais fronteiras apresentam condições de não penetração e não deslizamento. No estante inicial, a velocidade é nula em todo o domínio. A partir de então o contorno de entrada acelera até obter velocidade unitária.

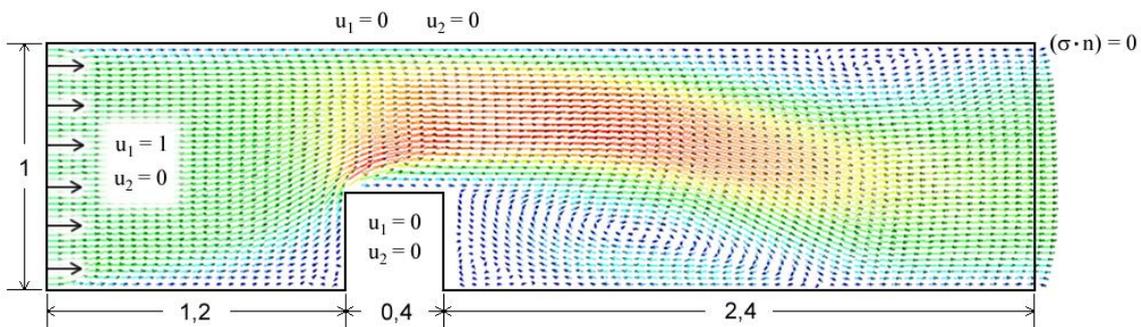


Figura 8 - Geometria e condições de contorno; Campo de velocidades ($t = 2,1$).

A malha correspondente aos resultados aqui apresentados possui 12.723 nós distribuídos em 6.224 elementos (Figura 9). Os mesmos elementos foram modelados no software comercial de volumes finitos Fluent, embora este considere as funções de forma lineares. O passo de tempo é $\Delta t = 0,01$. Na Figura 9 superpõe-se à malha apresentada, as linhas nas quais se avalia o campo de velocidades para possibilitar a comparação numérica entre os resultados obtidos pela presente metodologia e o Fluent (Figuras 10 à 14).

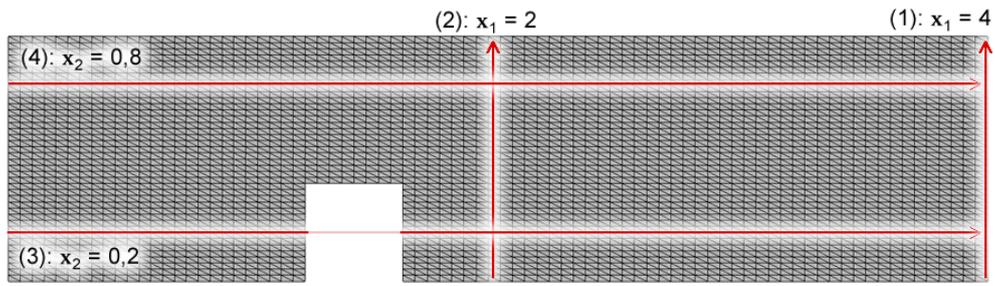


Figura 9 - Malha; Linhas onde se registra o perfil de velocidades das Figuras abaixo.

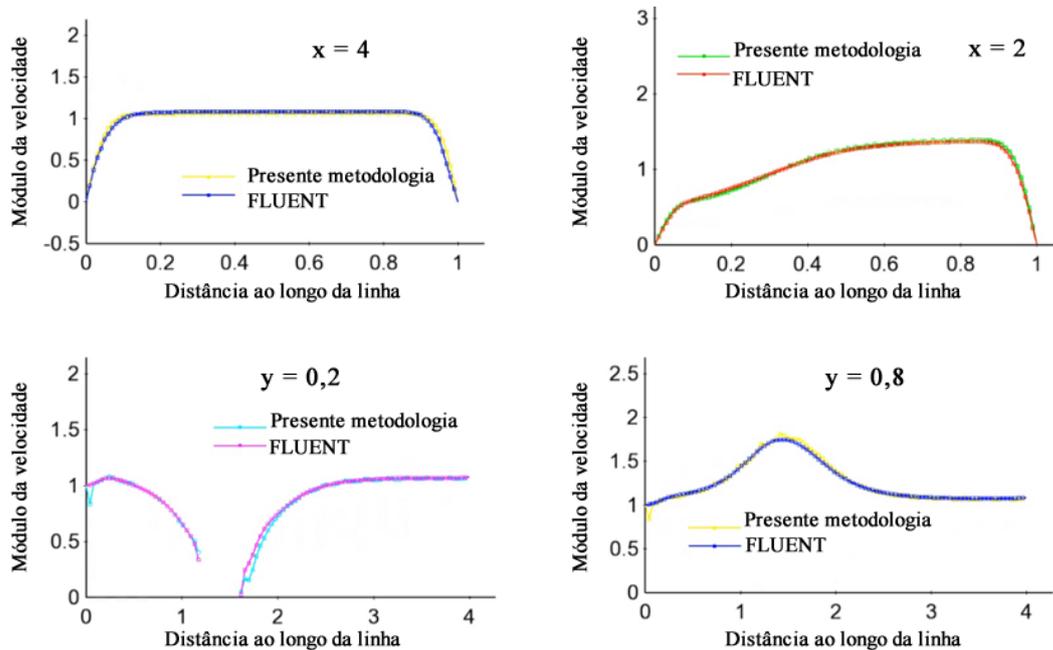


Figura 10 – Velocidades nas linhas da Figura 9; Comparação com FLUENT; Tempo = 0,20.

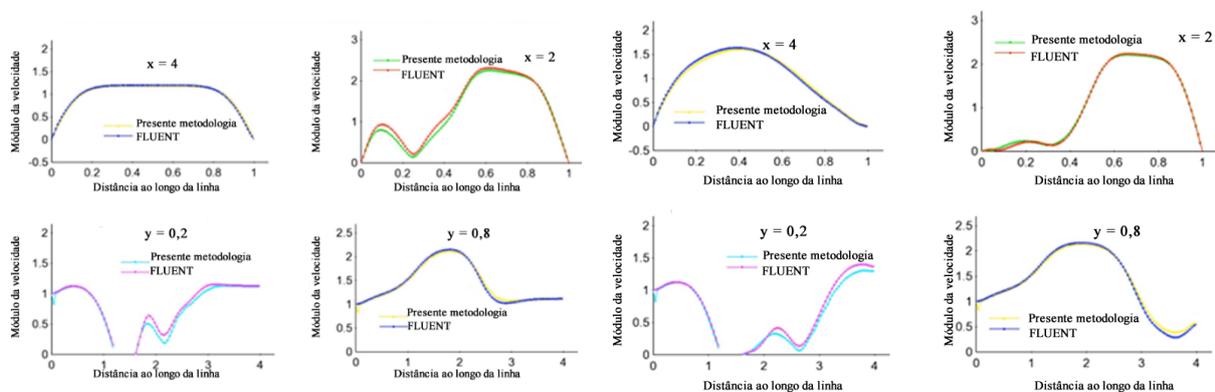


Figura 11 - Tempo = 1,20.

Figura 12 - Tempo = 2,61

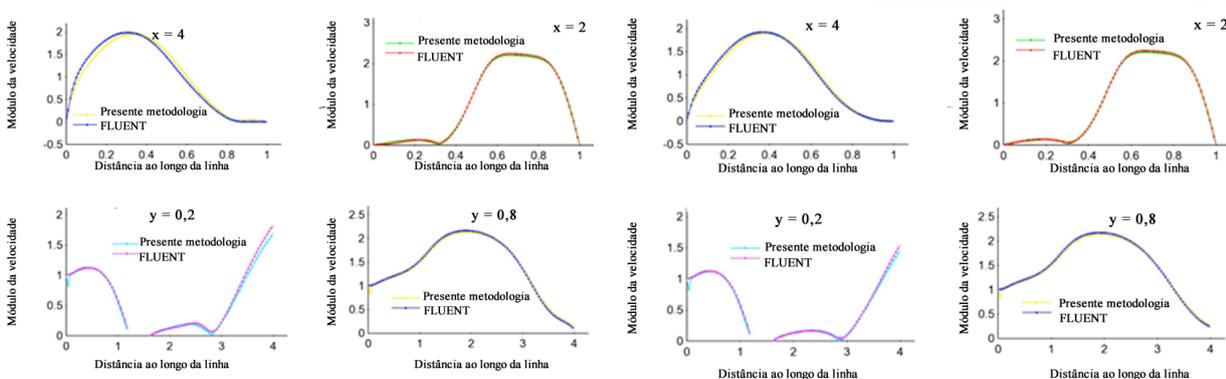


Figura 13 - Tempo = 3,70

Figura 14 - Tempo = 4,81

As Figuras 15 à 19 ilustram as linhas de corrente resultantes para o modelo apresentado em diferentes passos de tempo.

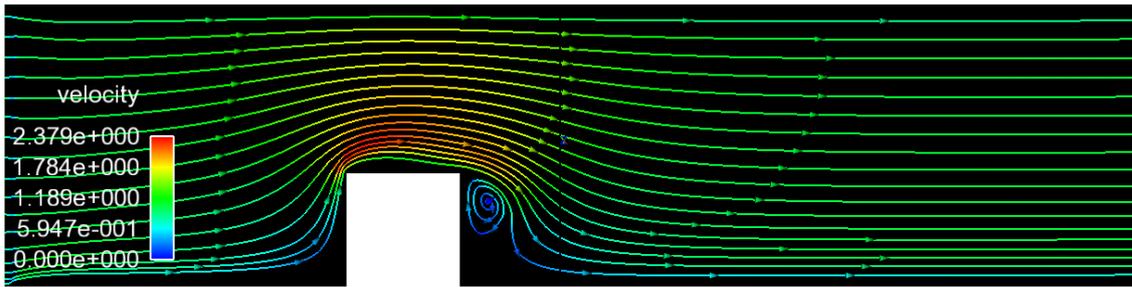


Figura 15- Linhas de corrente no tempo 0.21

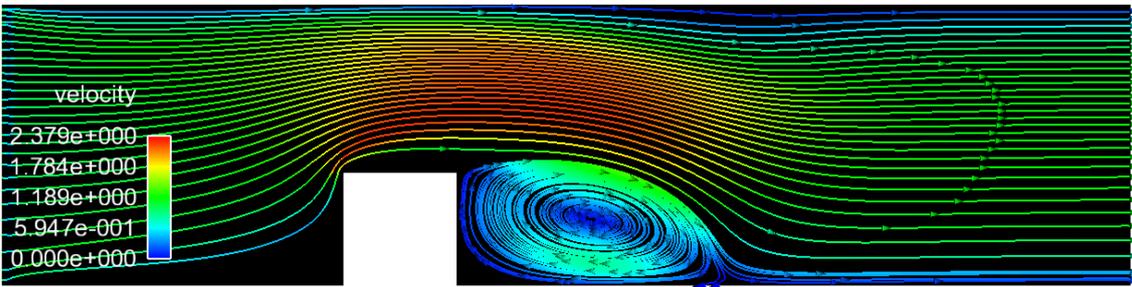


Figura 16 - Linhas de corrente no tempo 1.21

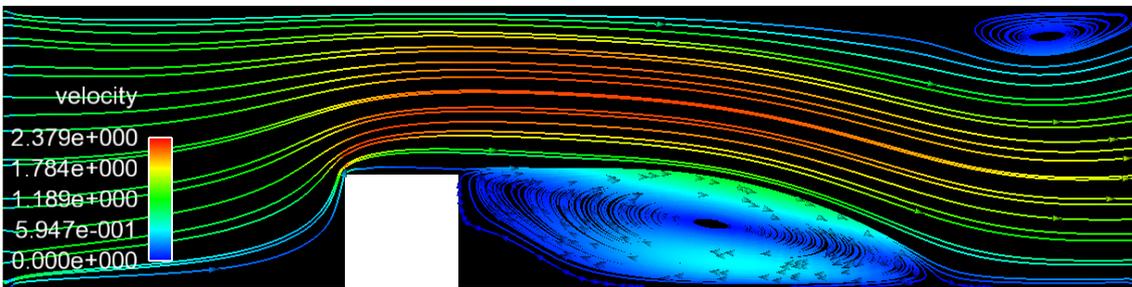


Figura 17 - Linhas de corrente no tempo 2.61

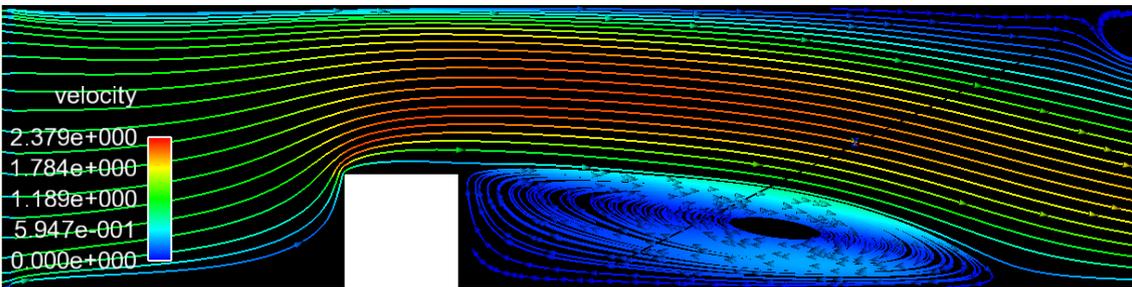


Figura 18 - Linhas de corrente no tempo 3.71

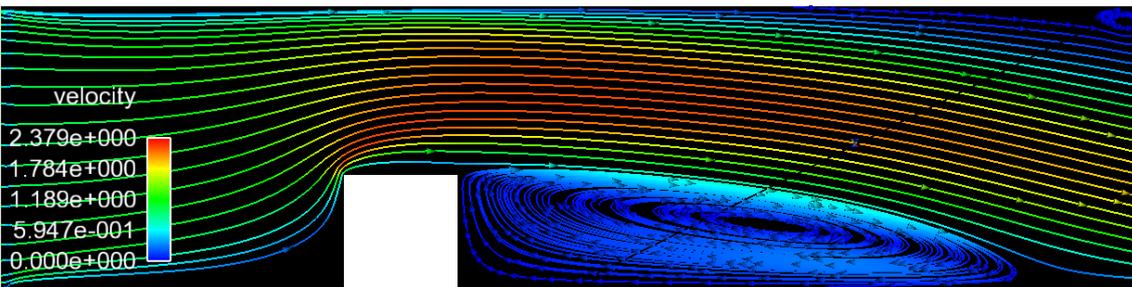


Figura 19 - Linhas de corrente no tempo 4.81

4.3. Impacto sísmico em reservatório

É de grande interesse da engenharia, obter a distribuição de pressões ao longo de uma barragem, quando esta acelera de forma súbita contra um reservatório. Este movimento pode ser induzido e.g. por um evento sísmico.

A Figura 20 ilustra o reservatório modelado em formato retangular, bem como suas condições de contorno e o campo de velocidades obtido com 20.000 elementos. O bordo esquerdo representa a barragem, que acelera de forma constante contra o reservatório. As condições de não penetração e livre deslizamento são aplicadas no fundo do reservatório, e as condições de fluxo livre (Vetor força de superfície nula) é aplicada nos bordos direito e superior. O fluido modelado possui massa específica $\rho = 1$, e viscosidade dinâmica $\mu = 10^{-3}$.

Sugerido pela curta transiência do fenômeno, impõe-se que o termo convectivo da equação do movimento é nulo, de forma que a equação 1 resume-se à equação de Stokes. Embora o campo de velocidades continue apresentando aceleração local, o campo de pressões converge para o estado estacionário.

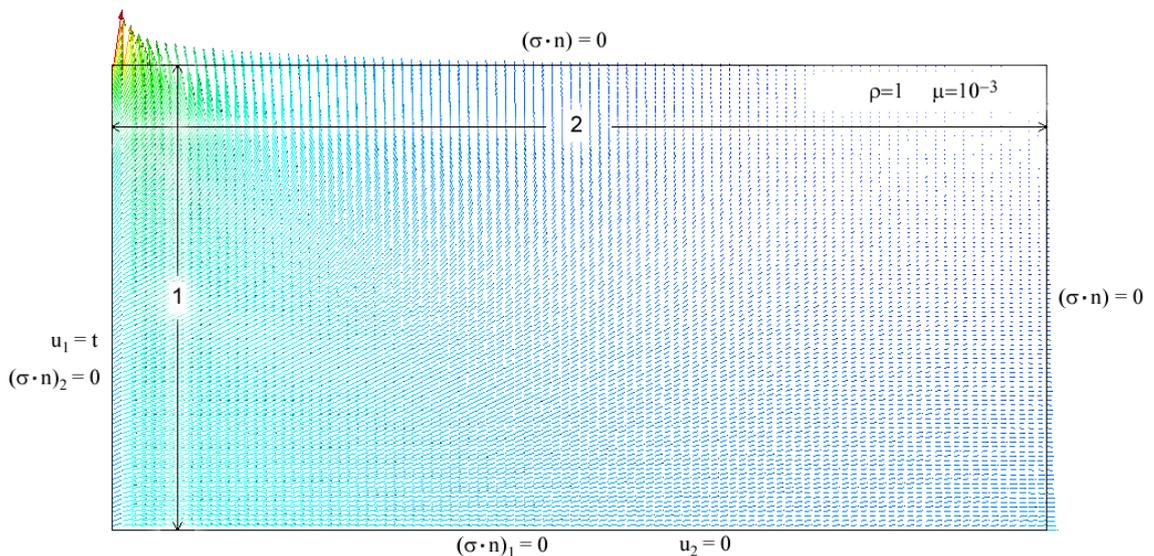


Figura 20 – Reservatório modelado; condições de contorno e campo de velocidades obtido com 20.000 elementos.

Apresentam-se aqui os resultados obtidos para duas malhas ordenadas e distintas. As malhas menos e mais refinadas são criadas subdividindo cada bordo do reservatório em 10 e 100 elementos respectivamente. Originam-se assim 10×10 e 100×100 quadrados que por sua vez dão origem a 200 e 20.000 elementos.

Conforme se observa nas Figuras 21 e 22, a metodologia aqui empregada para a obtenção da pressão a partir da equação 7 resulta em um campo de pressão não suave, i.e., cujas derivadas são descontínuas nos bordos dos elementos. Este fenômeno é previsto por Hughes, et al. (1979), que apresenta uma técnica de pós-processamento para a suavização do campo de pressões.

Destaca-se que embora as figuras abaixo se refiram a tempos distintos, ambos os campos atingiram estado permanente, sendo os diferentes passos de tempo adotados, responsáveis pela diferença apresentada.

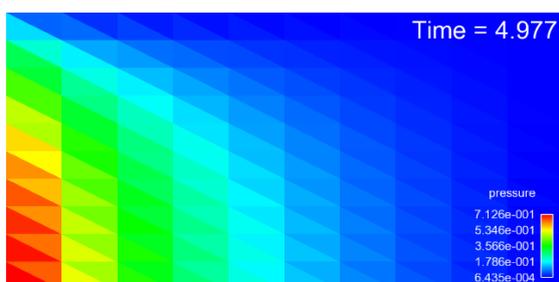


Figura 21 – Campo de pressões resultante para a malha ordenada de 200 elementos.

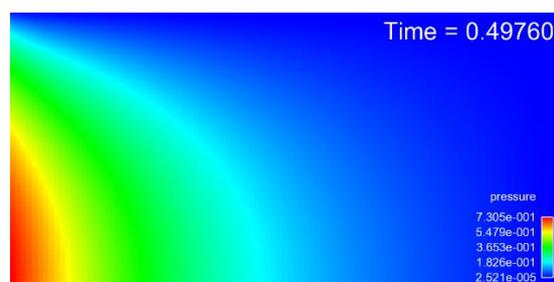


Figura 22 – Campo de pressões resultante para a malha ordenada de 20000 elementos.

As Figuras 23 e 24 comparam a pressão obtida ao longo da barragem com aquela apresentada por Hughes, et al. (1979). Percebe-se então ótima concordância entre os resultados obtidos, e que a suavização do campo de pressões pode, possivelmente, levar à convergência entre os resultados apresentados para as diferentes malhas modeladas.

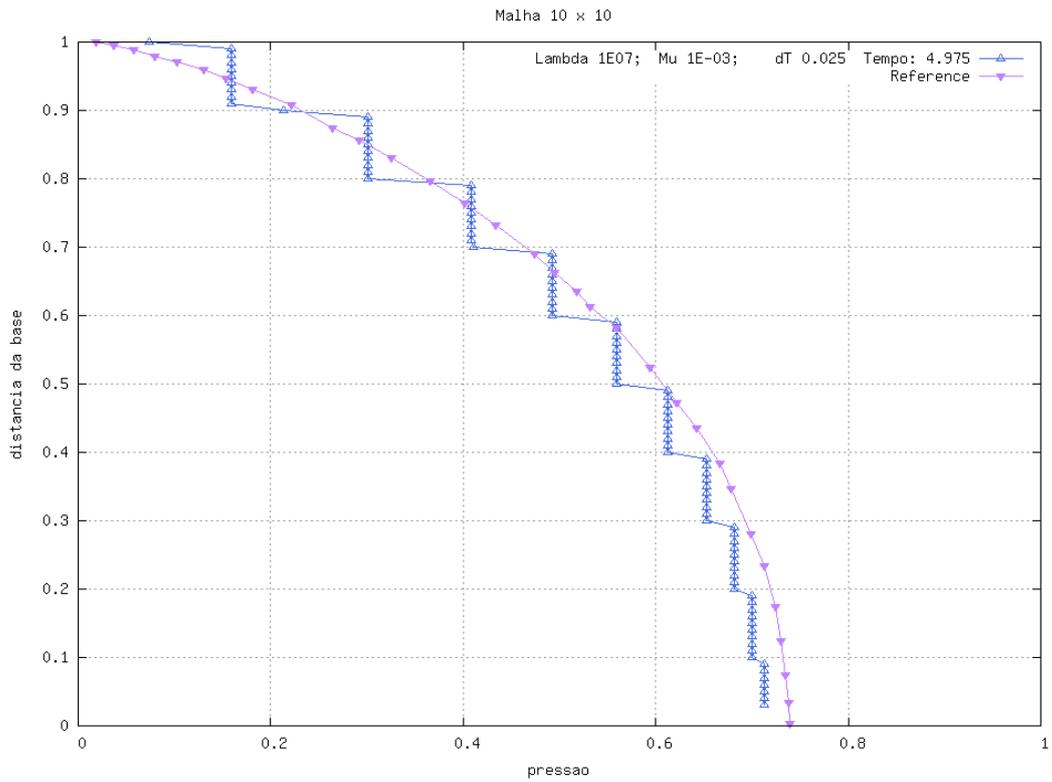


Figura 23 – Pressão ao longo da barragem para a malha ordenada de 200 elementos.

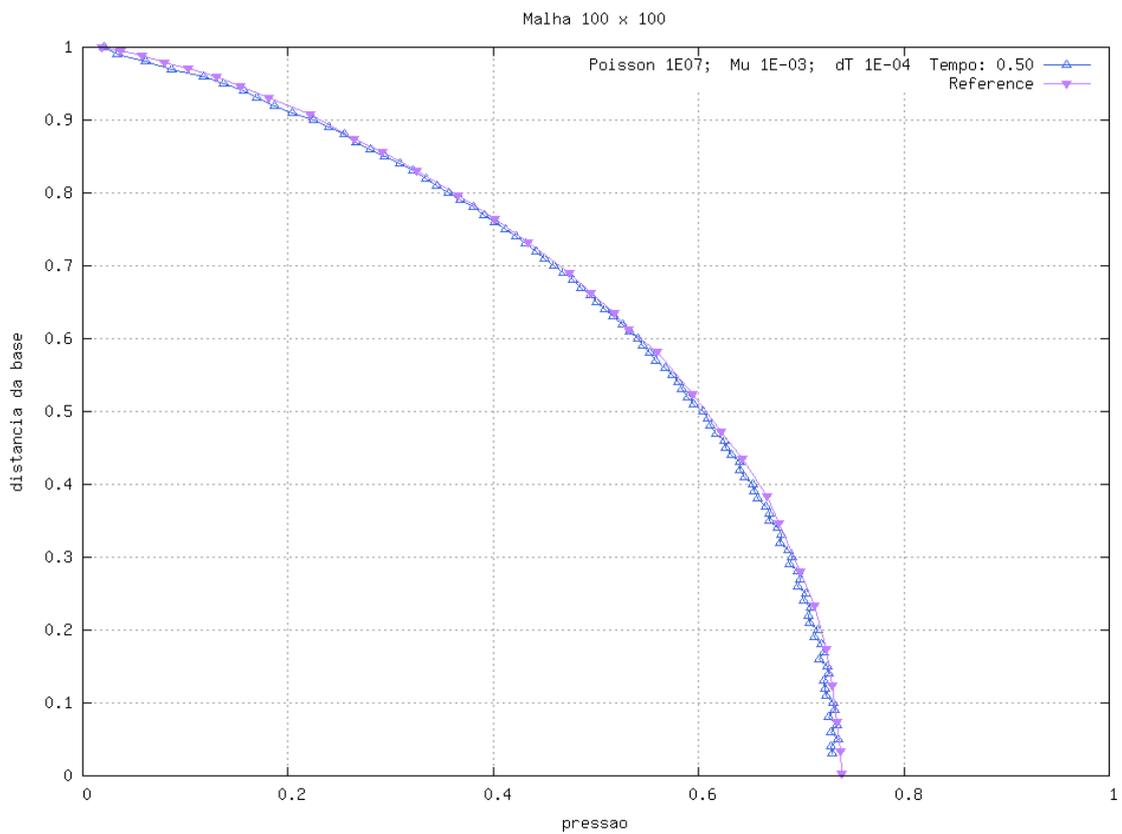


Figura 24 – Pressão ao longo da barragem para a malha ordenada de 20000 elementos.

4.4. Cilindro circular imerso em escoamento uniforme

O modelo consiste em um cilindro circular imerso em um escoamento uniforme. Um par de vórtices surge à jusante do cilindro como resultado de sua interação com o escoamento incidente. Quando o escoamento atinge maiores números de Reynolds esses vórtices se tornam instáveis e se desprendem do corpo, sendo carregados pelo escoamento e originando a esteira de vórtices de von Karman, fenômeno observado nesta modelagem.

Na indústria submarina, o fenômeno de desprendimento de vórtices aqui modelado é responsável por induzir esforços alternados no corpo cilíndrico, que representa a seção de um duto submarino. Esses esforços induzem à deflexão do duto, e por sua natureza alternada podem acarretar em falhas por fadiga. O dimensionamento racional do duto deve prever o esforço atuante devido às correntes incidentes. Para representar este fenômeno em escala de campo a presente metodologia deve evoluir para considerar efeitos de turbulência em um domínio tridimensional com altos números de Reynolds e movimentos de corpo rígido. Ainda assim, a presente modelagem é a porta de entrada para este problema, permitindo a maturidade científica necessária ao estudo deste complexo problema.

Este fenômeno é referido por Brooks & Hughes (1982) como *“Um dos mais desafiadores problemas para métodos numéricos, já que todos os termos presentes nas equações de governo são significantes”*.

O modelo, suas dimensões e condições de contorno são ilustrados na Figura 25. O bordo esquerdo do domínio é onde o fluxo incide com velocidade prescrita, uniforme e unitária. O bordo direito recebe condição de saída, com força de superfície nula. Em suas extremidades superior e inferior o domínio encontra condição de não penetração, mas livre deslizamento. Em sua interface com o corpo cilíndrico, o fluido tem velocidade prescrita nula.

No estante inicial, a velocidade é nula em todo o domínio. A partir de então o contorno de entrada acelera de forma constante entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$, onde obtém velocidade unitária.

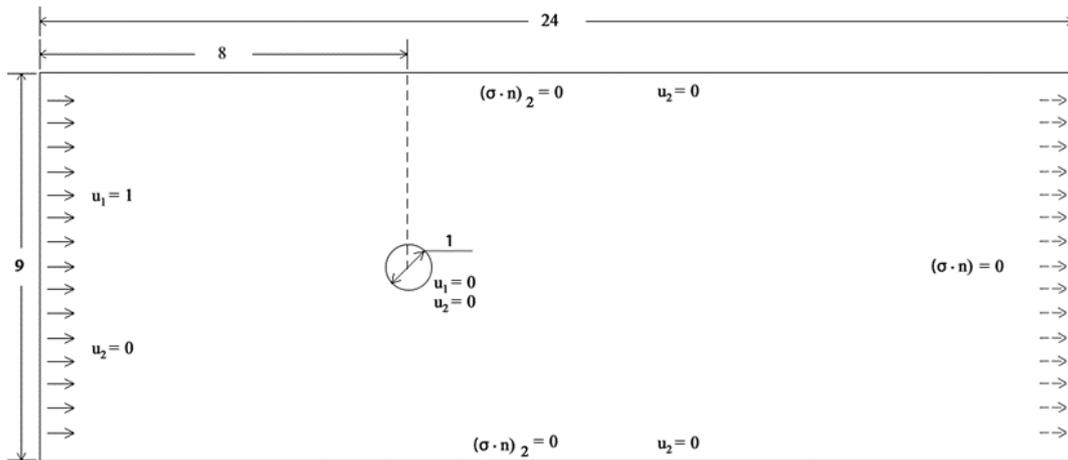


Figura 25. Geometria e condições de contorno do modelo de von Karman

O desprendimento alternado de vórtices observado nesta modelagem ocorre com frequência f . A força que age sobre o corpo rígido é decomposta em suas componentes paralela e transversal ao escoamento incidente, e recebem o nome de força de arrasto (F_D) e força de sustentação (F_L) respectivamente. A magnitude de F_D oscila com frequência $2f$ e média positiva, enquanto a magnitude de F_L oscila com frequência f e média nula.

Seja D o diâmetro do cilindro de seção circular, e U_0 a magnitude da velocidade incidente, o adimensional de Strouhal (St) descreve a frequência de liberação dos vórtices, tal que:

$$St \equiv fD/U_0 \quad (32)$$

Para os números de Reynolds considerados, a literatura (Ahlborn, et al., 2002) prevê através de procedimentos experimentais que o número de Strouhal relacionado à frequência de liberação de vórtices é dado pela fórmula:

$$St = 0.212(1 - 21.2/Re) \quad (33)$$

Para este problema o número de Reynolds considera a velocidade característica U_0 e o comprimento característico D , tal que:

$$Re = \rho U_0 D / \mu$$

4.4.1. Reynolds 100

A malha gerada é ilustrada na Figura 26 e possui 164.872 nós e 81.674 elementos. O contorno do corpo cilíndrico é composto por 2.520 nós. O intervalo de tempo adotado é de 0,01 unidades de tempo.

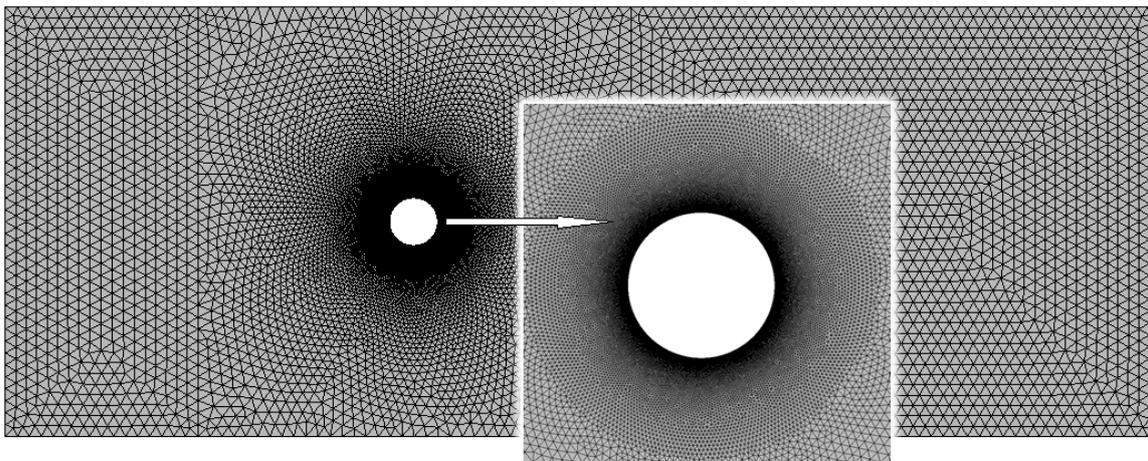


Figura 26. Malha de elementos finitos para o modelo de von Karman

A equação 33 indica número de Strouhal de 0,167 para o modelo aqui considerado, equivalente a um período de 5,99 unidades de tempo entre o desprendimento de cada vórtice. O período correspondente, observado nos resultados obtidos pela presente modelagem é de 5,79 unidades. Observa-se assim discrepância de 3,3% entre o resultado modelado e aquele previsto pela literatura.

Para validar as amplitudes do campo de velocidade e dos esforços induzidos no cilindro, o mesmo modelo foi implementado na plataforma comercial Fluent. Os mesmos elementos são modelados por ambas as formulações, embora o Fluent considere as funções de formas lineares, tendo número de nós reduzido. A Figura 27 compara os resultados de velocidades obtidos por ambas as ferramentas em quatro gráficos. Cada um dos gráficos exibidos na Figura 27 refere-se a um ponto posicionado na linha de centro horizontal, onde se observa a componente vertical do perfil de velocidade.

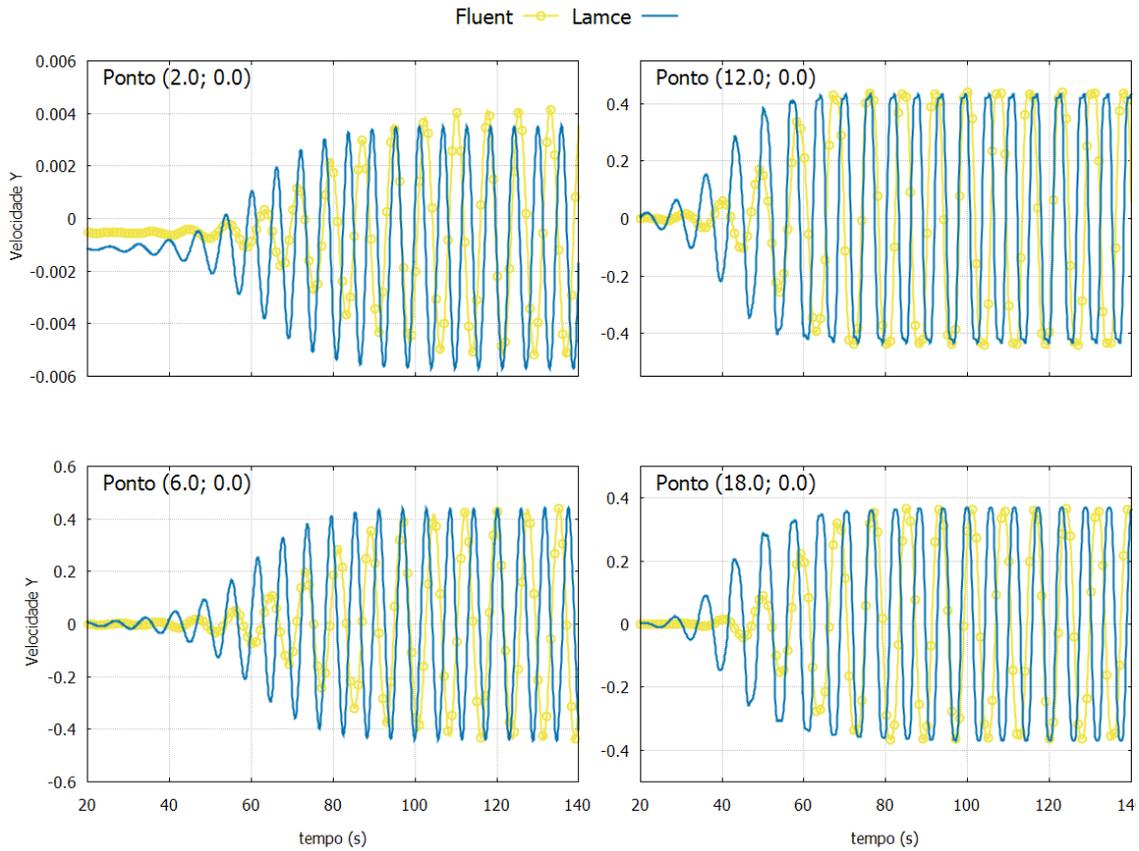


Figura 27. Velocidades transversais obtidas com a presente metodologia e o Fluent. Reynolds 100.

A Figura 28 superpõe os sinais da componente transversal da força resultante no cilindro, observadas por cada metodologia.

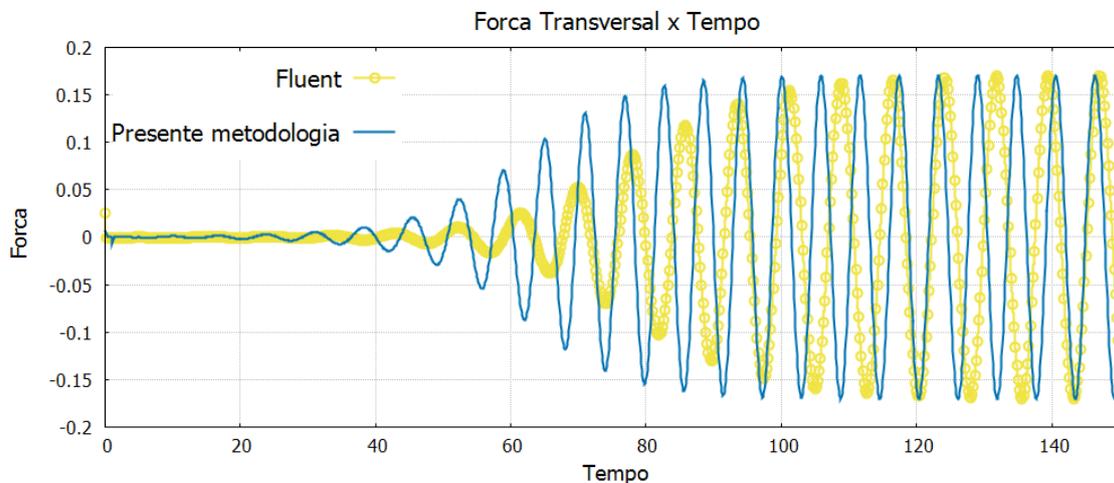


Figura 28. Esforços transversais no cilindro, obtidos pela presente metodologia e pelo Fluent. Reynolds 100.

A amplitude observada por cada um dos sinais indica ótima concordância entre as modelagens. O sinal gerado pela plataforma Fluent, porém, tem período de 7,64

unidades de tempo, apresentando discrepância de 27,6% em relação ao valor previsto pela equação 33.

Observa-se uma assimetria atípica em ambos os resultados apresentados no primeiro gráfico da Figura 27. Devido à sua pequena amplitude, essa anomalia não foi considerada como relevante às análises aqui realizadas, mas sugere-se o aprofundamento desta investigação em trabalhos futuros.

A Figura 29 ilustra os resultados obtidos pela presente metodologia e $Re = 100$, ao colorir o domínio e traçar linhas de contorno baseadas na magnitude do campo de velocidade.

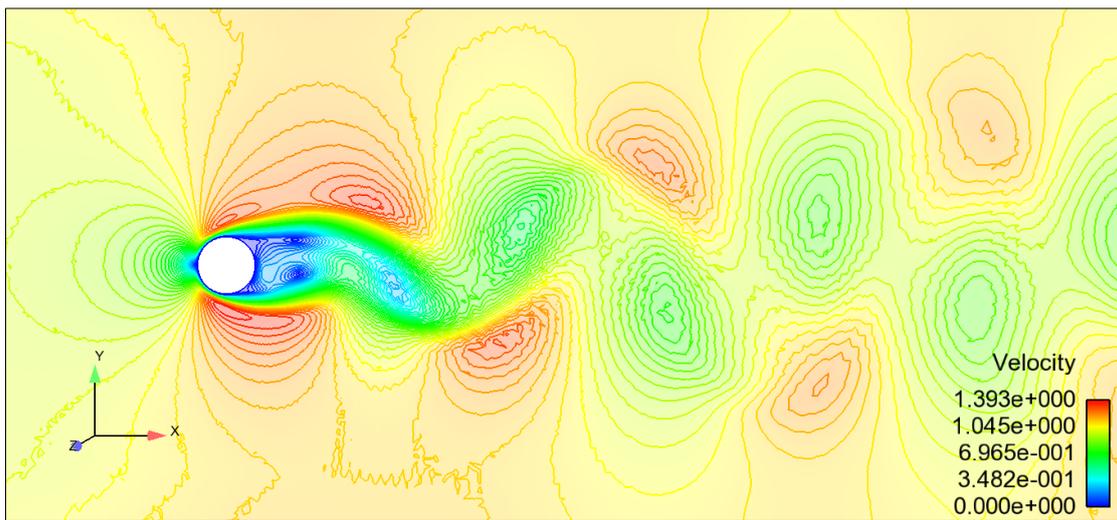


Figura 29. Esteira de Von Karman, $Re = 100$.

4.4.2. Reynolds 1000

Pretende-se nesta seção explorar os limites da formulação empregada, aplicando-a a um escoamento complexo, com forte caráter convectivo e relativamente alto números de Reynolds. Além de St , serão avaliados nesta seção os coeficientes de sustentação (C_L) e arrasto (C_D), que adimensionalizam as forças atuantes no cilindro, tal que:

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho U_0^2 D} \quad C_L = \frac{F_L}{0,5\rho U_0^2 D}$$

Os valores de referência adotados têm origem em procedimentos experimentais. O número de Strouhal tem como valor de referência a equação 33, que neste caso resulta em: $St_{ref} = 0,207$. O valor de referência com o qual se compara os resultados médios do C_D é bem difundido na literatura, e foi reproduzido numericamente por Yeung, et al. (1993), tal que $C_{Dref} = 1,0$. O coeficiente de sustentação oscila em torno de um valor nulo, e será estaticamente avaliado conforme Norberg (2003), tal que seja \hat{F}_L o valor quadrático médio (r.m.s) da força de sustentação:

$$C_L = \frac{\hat{F}_L}{0,5\rho U_0^2 D}$$

Conforme discutido na seção 3.4, o número de Peclet (Pe) deve ser utilizado para avaliar a adequação do domínio computacional ao grau de convecção do escoamento. Na seção anterior apresentou-se este problema com $Re = 100$. Segundo a equação 30, para que o mesmo modelo da seção anterior representasse $Re = 1000$, mantendo o número de Peclet constante, o tamanho característico dos elementos deveria ser multiplicado por 10, tornando o custo computacional demasiadamente alto.

Para viabilizar os presentes resultados modificou-se o tamanho do domínio computacional, nas medidas da Figura 30 (Comparar com a Figura 26), i.e., o comprimento entre a entrada e o cilindro passa de 8 para 4 unidades, e o comprimento total do domínio de 24 para 20 unidades. O número de nós no corpo cilíndrico também foi drasticamente reduzido, de 2.520 na Figura 26 para 300 na Figura 30. Uma nova estratégia de geração de malha foi aplicada ao redor do cilindro, proporcionando a adequação destes elementos à forte variação do campo de velocidades em uma direção preferencial (Figura 31), sem comprometer as demais regiões da malha.

A malha ilustrada nas Figuras 30 e 31 é uma dentre as quais terão seus resultados explorados neste projeto. As características de todas as malhas aqui estudadas são apresentadas na Tabela 2, e referenciadas pelo número de identificação do modelo (ID). O refinamento global do modelo 1 resulta no modelo 2. A diminuição do intervalo de tempo (dt) do modelo 2 resulta no modelo 3. O refinamento local à jusante do cilindro conduz o modelo 2 ao modelo 4, sendo acompanhado pela redução do número de nós na fronteira do cilindro.

Destaca-se que o sacrifício do refinamento na fronteira do cilindro no modelo 4 compromete as análises de convergência realizadas, e que a discretização temporal deve ser reavaliada após as alterações na discretização espacial do domínio. Estas inconsistências são consequência da alta capacidade computacional demandada pelos 147.336 elementos modelados, i.e., cerca de 50 horas de processamento e 10 GB de memória alocada. O excesso de demanda computacional se deve primeiramente a falta de estabilização dos termos convectivos, mas também à falta de otimização da quantidade de memória alocada e de técnicas de paralelização.

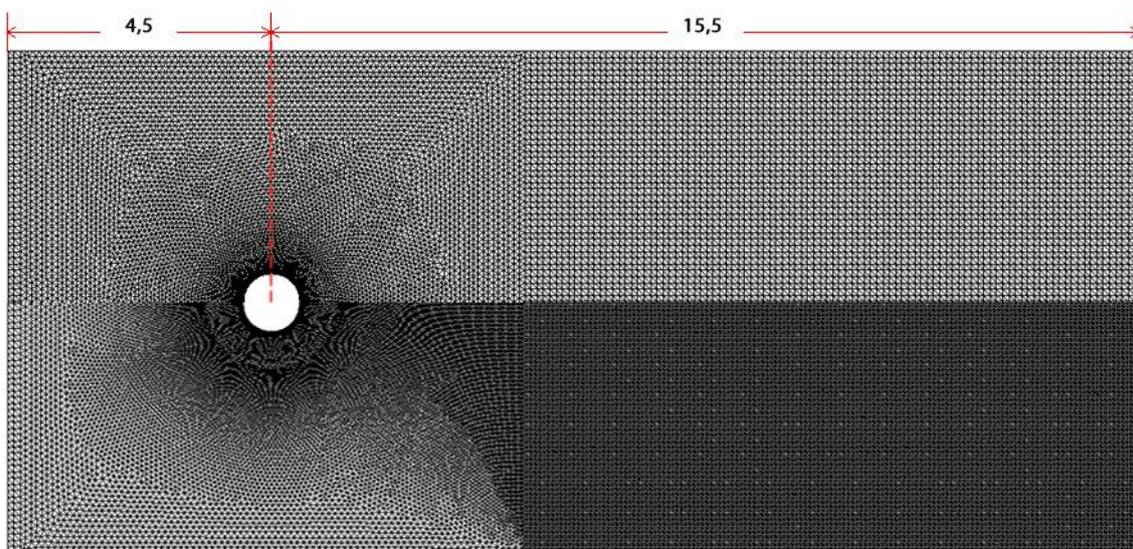


Figura 30 – Malhas ID = 1 (Em cima) e ID 4 (Em baixo); Alterações geométricas realizadas no modelo apresentado na Figura 26.

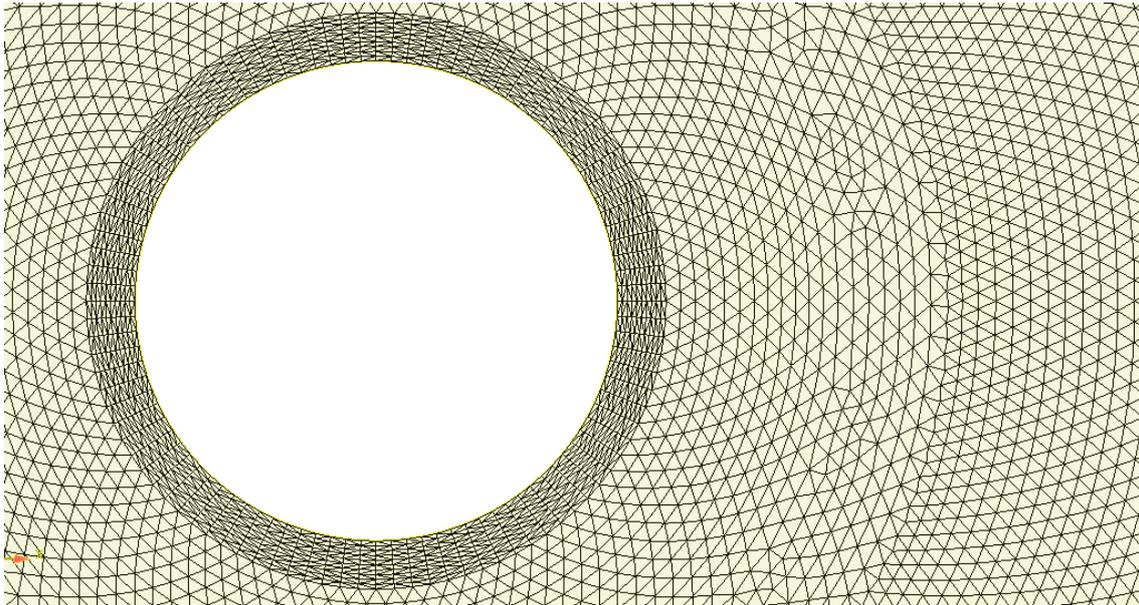


Figura 31 - Malha (ID = 4) para $Re = 1000$. Detalhe para a estratégia de geração dos elementos que cercam o cilindro.

Tabela 2 – Diferentes modelos gerados para $Re = 1000$

ID	Nós	Elementos	Nós no cilindro	dT	Região refinada
1	94.848	47.114	300	5,00E-03	---
2	210.264	104.668	300	5,00E-03	Global
3	210.264	104.668	300	2,50E-03	Global
4	295.704	147.336	200	5,00E-03	Jusante

Apresenta-se nas Figuras 32 e 33 as séries temporais dos coeficientes de arrasto e sustentação obtidos com os modelos apresentados na Tabela 2. Percebe-se que embora o refinamento global tenha tornado o modelo 1 estável, ele claramente não converge para o resultado esperado, uma vez que não captura as flutuações nos coeficientes de força com devida intensidade. O refinamento global subsequente faz com que o modelo 2 capture este fenômeno e sugere que o modelo se aproxima da convergência. O refinamento do passo de tempo no modelo 3 leva a resultados coincidentes com aqueles já obtidos, indicando a convergência da discretização temporal. O refinamento à jusante do cilindro no modelo 4 vem acompanhado da diminuição do número de nós que o compõe, e volta a introduzir diferenças no escoamento resultante. Percebe-se então que a discretização espacial pode melhorar.

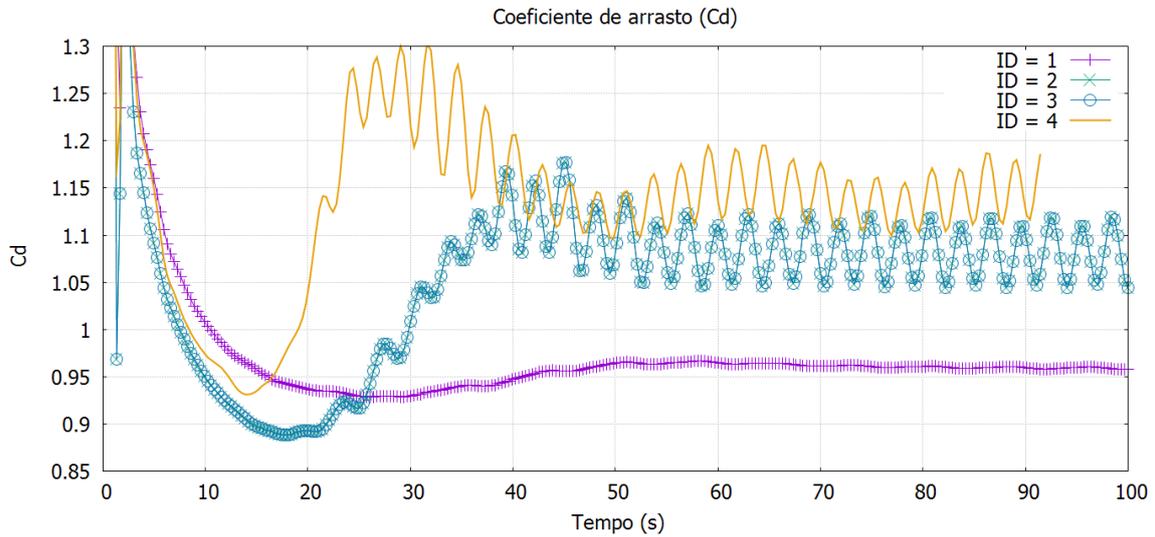


Figura 32 - Série histórica do coeficiente de arrasto

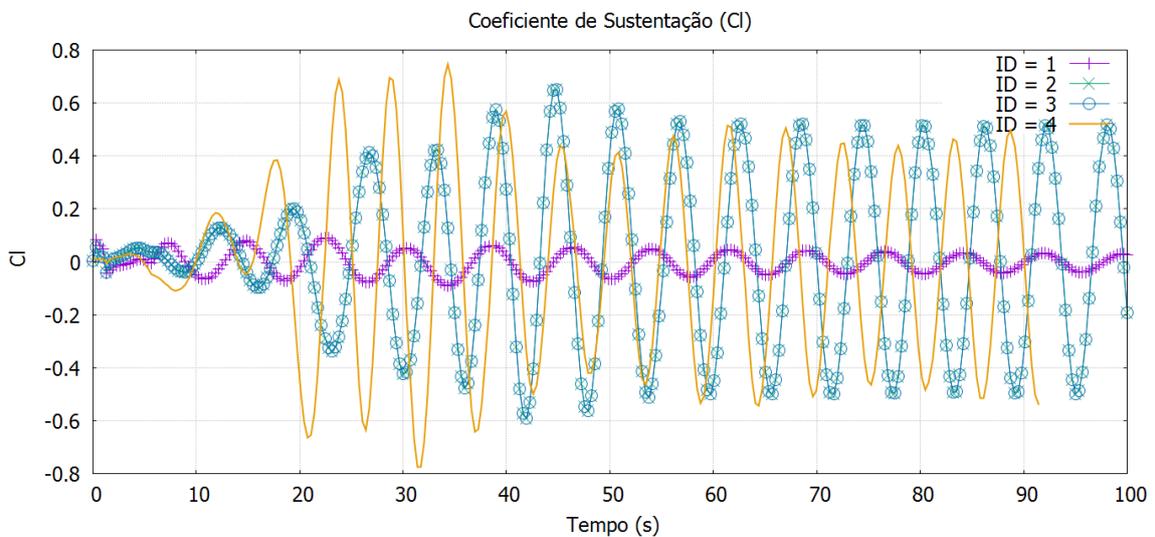


Figura 33 - Série histórica do coeficiente de sustentação

As constatações levantadas no parágrafo anterior são embasadas quantitativamente na Tabela 3. Destacam-se nesta tabela os parâmetros numéricos Peclet e CFL que em conjunto com outros resultados aqui omitidos, começam a esboçar seus limites de estabilidade para este problema ($Pe < \sim 100$, $CFL < \sim 1$). Suspeita-se que o limite de CFL máximo para obter-se a convergência poderia aumentar caso fossem adotadas condições iniciais mais convenientes do que a solução trivial.

Tabela 3 - Resultados obtidos para $Re = 1000$

ID	$1/f$ (s)	C_L	C_D	Peclet máx.	CFL máx.
1	7,92	0,03	0,96	86,25	0,28
2	5,94	0,37	1,08	60,04	0,47
3	5,94	0,37	1,08	60,51	0,24
4	5,28	0,35	1,15	79,94	0,28

As qualidades dos resultados obtidos são avaliadas na Tabela 4 (St e C_D) e na Figura 34 (C_L). Nesta figura superpõe-se os resultados aqui obtidos com aqueles compilados por Norberg (2003). A grande variância entre os resultados compilados demonstra a dificuldade de modelagem do fenômeno estudado, mesmo que por procedimentos experimentais.

Considera-se que os modelos 2, 3 e 4 apresentam resultados razoáveis quando comparados aos valores de referência, mas conforme já constatado deve-se investigar a divergência entre os modelos 2 e 4. No modelo 4 diminui-se a discrepância que qualifica a alternância de desprendimento de vórtices (St), já que o refinamento à jusante representa melhor a esteira de von Karman. Por outro lado, a diminuição do número de nós no cilindro deve ser responsável pelo aumento da discrepância do coeficiente de arrasto.

Este modelo deve ser profundamente estudado em trabalhos futuros, permitindo a obtenção de resultados mais conclusivos.

Tabela 4 - Comparação numérica entre valores aqui obtidos e os de referência

ID	St	C_D
1	64%	-4%
2	23%	8%
3	23%	8%
4	10%	15%

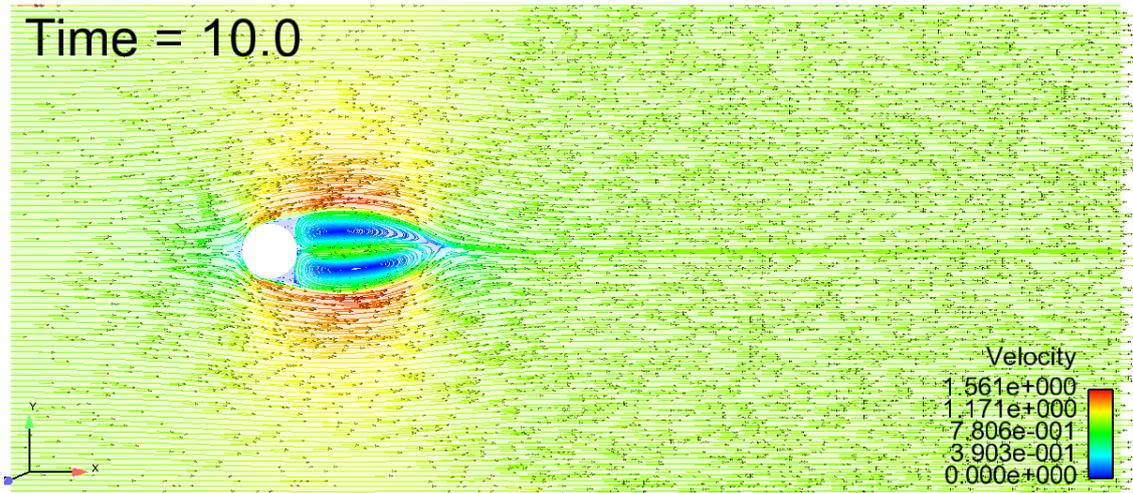


Figura 35 - Linhas de corrente e campo de velocidades para Re 1000, modelo 04. $t = 10$.

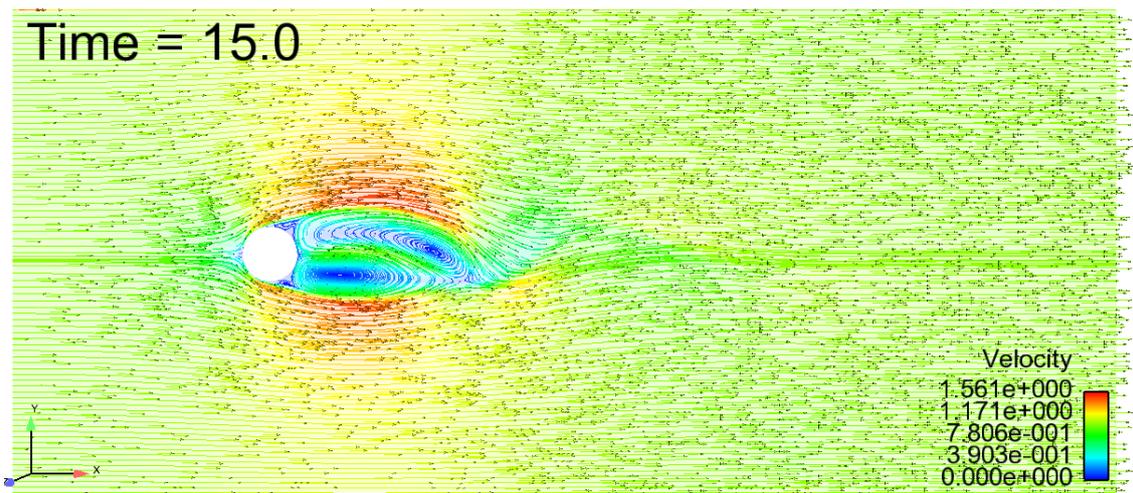


Figura 36 - Linhas de corrente e campo de velocidades para Re 1000, modelo 04. $t = 15$.

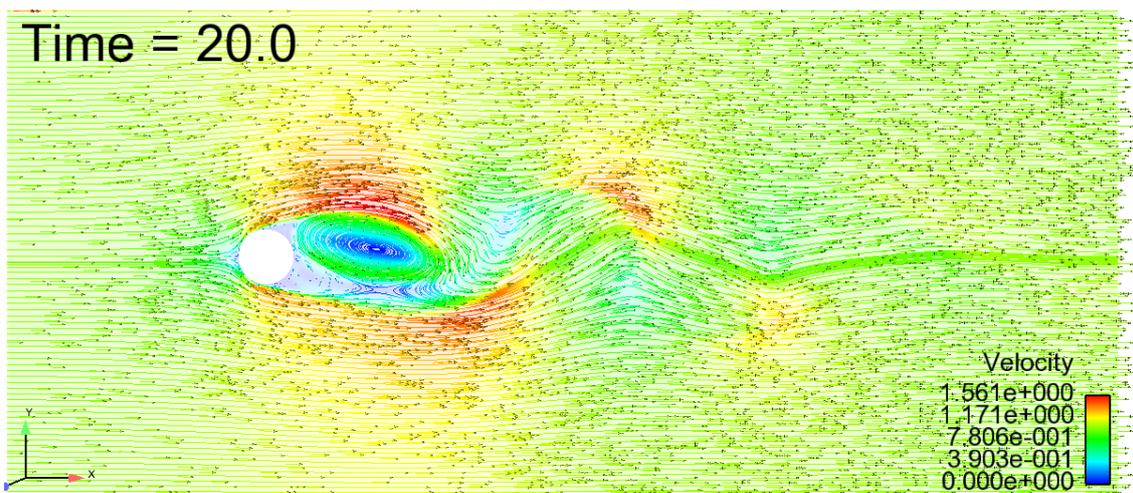


Figura 37 - Linhas de corrente e campo de velocidades para Re 1000, modelo 04. $t = 20$.

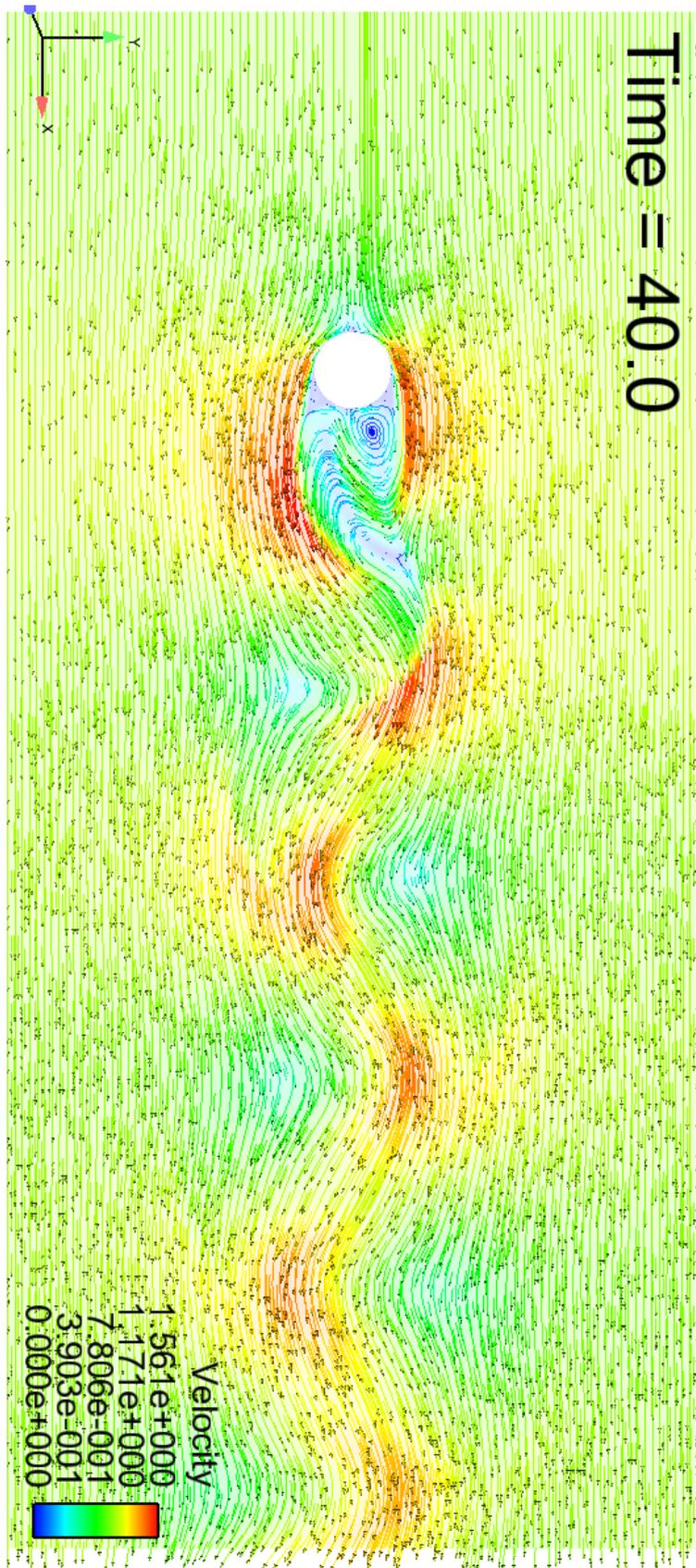


Figura 38 - Linhas de corrente e campo de velocidades para $Re\ 1000$, modelo 04. $t = 40$.

5. Conclusão

Apresentou-se neste trabalho uma formulação penalizada de elementos finitos, capaz de modelar escoamentos bidimensionais e incompressíveis de fluidos newtonianos. O estudo metodológico que compõe a formulação empregada foi apresentado, incentivando sua aplicabilidade a outros problemas de valor de contorno. Algumas das principais dificuldades presentes na simulação computacional de fluidos foram introduzidas, bem como os métodos utilizados para contorná-las. Os estudos de caso apresentados validam o código implementado e exemplificam suas capacidades.

A principal dificuldade encontrada por esta formulação é a reprodução de escoamentos com forte caráter convectivo, uma vez que nenhuma técnica de estabilização é introduzida. Esta dificuldade foi discutida na seção 2.1.5 e exemplificada na seção 4.4.2. Mostrou-se que desta forma o refinamento global necessário pode tornar o modelo proibitivo, ou comprometer a convergência do método, por inibir o refinamento local da malha nas regiões mais críticas, i.e., onde o campo de velocidades varia mais rapidamente ou onde as derivadas espaciais deste campo constituem os parâmetros de interesse.

Ressalta-se que o código implementado não leva em consideração técnicas de computação de alto desempenho. Estas aumentam drasticamente a eficiência de métodos numéricos, diminuindo a quantidade de memória requerida e aumentando a capacidade de processamento. Neste sentido espera-se que ao introduzir técnicas de paralelismo e reescrever o código para que este apresente redução do consumo de memória demandado, regimes de escoamento com maiores números de Reynolds sejam explorados.

Trabalhos futuros pretendem estender as capacidades da formulação desenvolvida, capacitando-a, por exemplo, a solucionar problemas tridimensionais e de interação fluido-estrutura, onde devem ser incorporados modelos de superfície livre, turbulência e movimento de corpo rígido. Estas propostas devem aumentar drasticamente o consumo de capacidade computacional demandado para determinado problema. Considera-se então o emprego de técnicas capazes de contornar os problemas encontrados em maiores números de Reynolds, como a técnica de SUPG apresentada por Brooks & Hughes (1982).

O principal objetivo alcançado foi o desenvolvimento e implementação de uma formulação consistente, capaz de modelar as equações de Navier-Stokes de forma conveniente, sem a introdução de parâmetros de estabilização.

6. Apêndice

6.1. Propriedades tensoriais

• Seja t_{ij} uma matriz simétrica e s_{ij} uma matriz não simétrica; Seja $s_{(ij)}$ a componente simétrica de s_{ij} e $s_{[ij]}$ sua componente antissimétrica, prova-se que $\{s_{ij}:t_{ij} = s_{(ij)}:t_{ij}\}$, pois:

$$s_{[ij]}:t_{ij} \stackrel{\text{anti-simetria}}{=} -s_{[ji]}:t_{ij} \stackrel{\text{simetria}}{=} -s_{[ji]}:t_{ji} \stackrel{\text{redefinição dos índices}}{=} -s_{[ij]}:t_{ij} = 0$$

$$s_{ij}:t_{ij} = s_{(ij)}:t_{ij} + \overbrace{s_{[ij]}:t_{ij}}^0$$

• O gradiente do vetor u é dado pelo um tensor ∇u :

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

• Seja $\text{div}(\sigma)$ o vetor divergente do tensor σ , então $(\nabla \cdot \sigma) = \text{div}(\sigma^T)$:

$$(\nabla \cdot \sigma) = \begin{bmatrix} \partial\sigma_{11}/\partial x_1 + \partial\sigma_{21}/\partial x_2 + \partial\sigma_{31}/\partial x_3 \\ \partial\sigma_{12}/\partial x_1 + \partial\sigma_{22}/\partial x_2 + \partial\sigma_{32}/\partial x_3 \\ \partial\sigma_{13}/\partial x_1 + \partial\sigma_{23}/\partial x_2 + \partial\sigma_{33}/\partial x_3 \end{bmatrix}$$

6.2. Matrizes da forma semi-discreta

A nível de elemento, ao qual corresponde o subdomínio $\Omega^e \in \Omega$, as matrizes M^e , C^e e $K^e(\mathbf{u})$ podem ser representadas nas formas abaixo. Estes arranjos exigem que o vetor de incógnitas $\mathbf{u}^e = d_i$ seja agrupado por nó. Para cada nó, seguem-se sequencialmente os graus de liberdade em x e y a ele associado. Havendo 12 graus de liberdade associados a um elemento, $i = 1..12$ e $j = 1..12$. O processo de montagem descrito em Hughes (1987), é responsável por endereçar a contribuição das matrizes avaliadas a nível de elemento nas matrizes globais da equação 22:

$$M^e = \rho \int A^T A d\Omega^e \quad C^e = \int \left[\overbrace{B^T D_\mu B}^{c_\mu} + \overbrace{B^T D_\lambda B}^{c_\lambda} \right] d\Omega^e$$

$$K_{ij}^e(\mathbf{u}) = \rho \int N_i (u_x \cdot \partial N_j / \partial x + u_y \cdot \partial N_j / \partial y) d\Omega^e$$

$$F = \int N_i b_i d\Omega^e + \int N_i h_i^e d\Gamma_h^e - M_{ij}^e \dot{g}_i^e + [C_{ij}^e + K_{ij}^e(\mathbf{u})] g_i^e$$

Onde g_i^e e h_i^e , são respectivamente as condições de Dirichlet e Neumann prescritas no grau de liberdade i ($g_i^e = 0$ em Γ_g^{-1} , $h_i^e = 0$ em Γ_h^{-1}), b_i é a força de corpo atuante em i , e:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_\mu = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_\lambda = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Bibliografia

Ahlborn, B., Seto, M. L. & Noack, B. R., 2002. On drag, Strouhal number and vortex-street structure. Fluid Dynamics Research.

Batchelor, G. K., 1967. An Introduction to Fluid Dynamics. s.l.:Cambridge University Press.

Brezzi, F., 1974. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique.

Brooks, A. N. & Hughes, T. J., 1982. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows With Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.

Cuthill, E. & McKee, J., 1969. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. New York, ACM.

Eckert, M., 2007. The dawn of fluid dynamics: a discipline between science and technology. s.l.:John Wiley & Sons.

Engelman, M., Strang, G. & Bathe, K. J., 1981. The application of quasi-Newton methods in fluid mechanics. International Journal for Numerical Methods in Engineering.

Ghia, U., Ghia, K. N. & Shin, C. T., 1982. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. Journal of Computational Physics, Volume 48, pp. 387-411.

Gresho, P. M. & Sani, R. L., 1998. Incompressible flow and the finite element method. New York: John Wiley and Sons, Inc..

Griebel, M., Dornseifer, T. & Neunhoffer, T., 1998. Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Hernández, J. E. R., 1999. Método da Projeção na Simulação de Escoamentos Incompressíveis Bidimensionais em Regime Transiente. Rio de Janeiro: COPPE, UFRJ.

Hughes, T. J. R., 1987. The finite Element method: linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc..

Hughes, T. J. R., Liu, W. K. & Brooks, A., 1979. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. Journal of Computational Physics.

Karam, F. J., 1989. Uma nova formulação de elementos finitos mistos para escoamentos incompressíveis. Rio de Janeiro(RJ): Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Löhner, R., 2001. Applied CFD Techniques: An Introduction based on Finite Elements Methods. England: John Wiley & Sons.

Malkus, D. S. & Hughes, T. J. R., 1978. Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.

Malvern, L. E., 1969. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Monaghan, J., 2012. Smoothed Particle Hydrodynamics and Its Diverse Applications. Annual Review of Fluid Mechanics, Volume 44, pp. 323-346.

Norberg, C., 2003. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. Journal of Fluids and Structures, Volume 17, pp. 57-96.

Reddy, J. N., 1982. Penalty-finite-element analysis of 3-D Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 19 Fevereiro.

Shames, I. H. & Cozzarelli, F. A., 1997. Analysis, Elastic and Inelastic Stress. Philadelphia: Taylor & Francis.

Silva, C. E. et al., 2009. EdgeCFD-ALE: A finite element system for complex fluid-structure interactions in offshore engineering.. CILAMCE, Issue Buzios.

Temam, R., 1977. Navier-Stokes Equations. North Holland.

Wilcox, D. C., 1998. Turbulence Modeling for CFD. 2a ed. s.l.:DCW Industries, Inc..

Yeung, R. W., Sphaier, S. H. & Vaidhyanathan, M., 1993. Unsteady Flow About Bluff Cylinders. International Journal of Offshore and Polar Engineering, June.